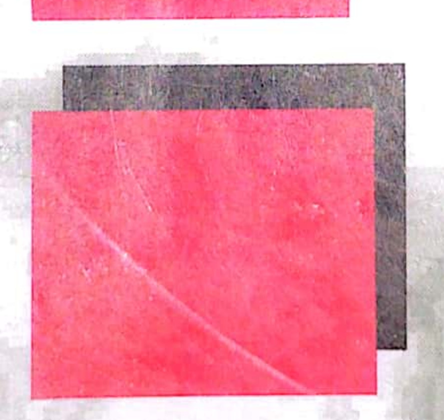
# Introducción a la resolución de problemas

## *Teoría y estrategias matemáticas*

**Marco Antonio García Juárez**



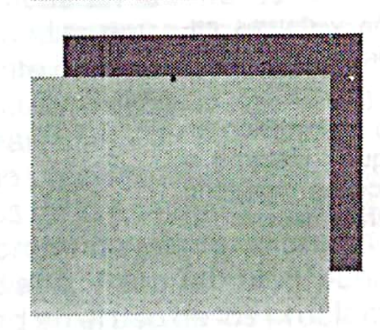


# Introducción a la resolución de problemas

# Introducción a la resolución de problemas

## *Teoría y estrategias matemáticas*

**Marco Antonio García Juárez**



Primera edición



**Editorial Esfinge, S.A. de C.V.**
Esfuerzo 18-A
Naucalpan, Edo. de México
1996

Primera edición: 1996



**Editorial Esfinge, S.A. de C.V.**
Esfuerzo 18-A
Naucalpan, Edo. de México

Diseño e ilustración:
Mauricio de Jesús Juárez Servín
Laura Liliana Díaz Hdez.



ISBN 968-412 972-6

IMPRESO EN MÉXICO

# Presentación

Quisiera iniciar la presentación de este libro con dos reflexiones que me parecen muy importantes para el buen desempeño de la tarea docente: ¿qué significa enseñar matemáticas? y ¿qué significa aprender matemáticas?

Una respuesta muy conocida relaciona ambas preguntas y establece que el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina es una secuencia de conocimientos (conceptos, ejercicios y problemas) arreglados de una manera gradual y ordenada (de la fácil a lo difícil). Es decir, aprender matemáticas, desde este punto de vista, significa que los alumnos identifiquen, paso a paso, los artefactos de esta disciplina; esto es, sus conceptos y sus procedimientos, principalmente por la vía de la memorización y los ejercicios. Desde muy temprana edad se enseña a los niños a sumar, restar, multiplicar y dividir números naturales. Más tarde se les enseña a sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones y números con signo. Hacia estos conocimientos se dirigen los esfuerzos de no pocos libros de texto y profesores.

Sin embargo, esta concepción ha sido cuestionada y han empezado a surgir otras perspectivas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, la idea de que aprender matemáticas se relacione con que el alumno desarrolle o construya las ideas matemáticas o que el estudiante recolecte información, descubra o cree relaciones, discuta sus ideas, plantee conjeturas y estratégicamente evalúe y contraste sus resultados, ubica a esta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión.

Este nuevo enfoque se basa en la idea fundamental de que los jóvenes deben ser enfrentados activamente a problemas, darles la oportunidad de que exploren técnicas matemáticas en la mira de resolución de problemas. Estas técnicas deberían ser discutidas entre los alumnos y el maestro. Los alumnos deberán estar continuamente discutiendo y analizando ideas, por parejas o en pequeños grupos. Esta discusión debería desarrollar su confianza partiendo de la evaluación de estas ideas...

Este libro ha sido diseñado precisamente para tratar de acortar la brecha entre las aspiraciones y los logros de la enseñanza y del aprendizaje de la resolución de problemas. Asimismo, pretende ayudar al profesor de primaria y secundaria en su tarea docente cotidiana. Pero también puede servir a todos aquellos interesados en la efectividad en el uso de los problemas, tales como psicólogos, pedagogos y futuros profesores.

Casi nunca la resolución de problemas ha sido considerada como objeto de enseñanza, más bien ha sido común la opinión de la mayoría de los profesores, sobre la resolución de problemas, como un producto espontáneo que no requiere una estructuración planificada de las influencias didácticas para enseñar a los alumnos cómo resolverlos. O bien, que para que aprendan a resolverlos resulta necesario que resuelvan muchos problemas bajo su indicación. Así, durante mucho tiempo, la resolución de problemas ha sido para los profesores de todos los niveles, un enigma, y año con año han visto

frustradas sus intenciones de enseñar a sus alumnos a ser mejores resolutores de problemas, sobre todo aquellos profesores que ven en esta estrategia una vía para alcanzar altos niveles cognoscitivos.

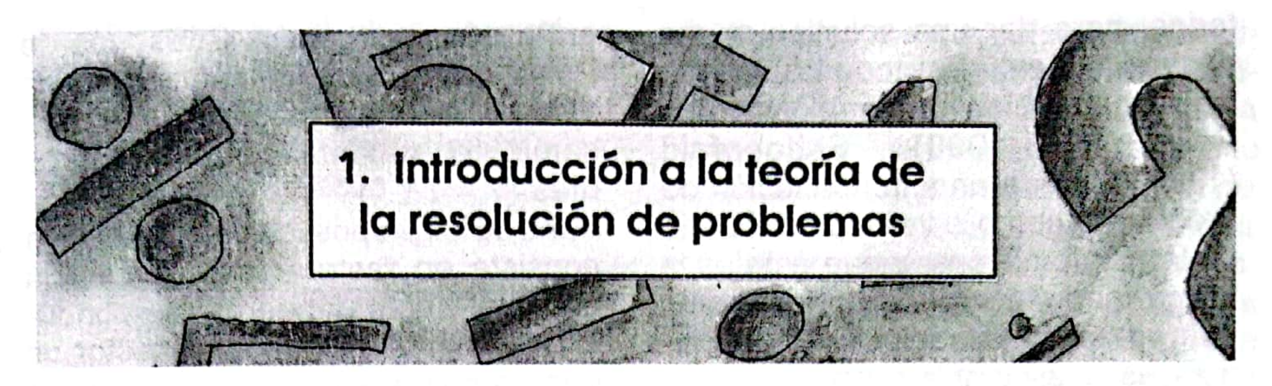
Este libro es producto de los múltiples seminarios y cursos cortos impartidos en el Centro de Actualización Magisterial (CAMEM) en el Estado de México, con sede en ciudad Nezahualcóyotl, de 1993 a 1995. En él se combinan elementos teóricos de la resolución de problemas en la perspectiva de analizar las ideas principales de esta actividad, tales como: ¿qué es un problema?, ¿qué es la resolución de problemas?, ¿por qué enseñar la resolución de problemas?, ¿cuándo enseñar la resolución de problemas en el salón de clases?, ¿qué hace un buen resolutor de problemas?, ¿cómo diseñar excelentes problemas?, ¿cómo enseñar la resolución de problemas?, ¿cuáles estrategias se pueden usar en el salón de clases?, con un lenguaje claro y accesible.

También se dan sugerencias didácticas, cuidadosamente seleccionadas de acuerdo con los nuevos enfoques metodológicos vigentes. Estas sugerencias y problemas propuestos han sido probados en salones de clase, seminarios, talleres y cursos del CAMEM.

Con toda seguridad, el lector (maestro, psicólogo, pedagogo, padre de familia) encontrará por vez primera una serie de reflexiones y sugerencias para trabajar con niños y jóvenes de manera estructurada que le permita incorporar no sólo los contenidos matemáticos correspondientes a diversos grados, sino también el desarrollo de ciertas habilidades y destrezas, fundamentales ambas para una magnífica formación básica en matemáticas y colaborar con ello en la noble tarea de elevar el nivel de preparación de los niños, para que puedan realizar más y con mejor efectividad el uso de problemas en su vida cotidiana.

Prof. Marco Antonio García Juárez

# Índice de contenido



# 1. Introducción a la teoría de la resolución de problemas

## 1.1 Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en primaria y secundaria está sufriendo modificaciones sustanciales en la forma de trabajo de los alumnos y del profesor. Aparentemente esto se debe a tres sencillas razones:

a. Por los nuevos requerimientos sociales.
b. Por el desarrollo mismo de las matemáticas.
c. Por los avances de la investigación en educación matemática.

Estas transformaciones parecen apuntar a la formación de ciertas capacidades, tales como la capacidad para *comunicar*, la capacidad para *resolver problemas* y el *desarrollo del pensamiento.*

Con todo ello se pretende también desarrollar ciertas *actitudes* en los niños, tales como la *valoración* de las matemáticas y la *estimación* de la propia capacidad, sin descuidar las *destrezas* y los *procedimientos* necesarios para la competencia matemática.

Uno de los principios teóricos en que se sustenta esta nueva propuesta metodológica de la enseñanza de las matemáticas es, precisamente, la *resolución de problemas*, utilizada como elemento estructurador de los contenidos curriculares en cuanto sirve de medio integrador del conocimiento y constituye un magnífico recurso que propicia la actividad cognoscitiva. Sin embargo, esto que es totalmente plausible se ha enfrentado a una serie de dificultades en los años que lleva implantado este enfoque, probamente debido a que, durante décadas, el ejercicio y la práctica han sido la norma en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En efecto, actualmente se observan conductas semejantes, por ejemplo, cuando al final de cada lección de un libro de texto de matemáticas, o después de la enseñanza de un concepto, en el salón de clases se le presenta al estudiante una serie de ejercicios rutinarios denominados "problemas".

En clara oposición a esta práctica tradicional, la resolución de problemas se concibe actualmente como generadora de un proceso a través del cual, quien aprende, combina elementos del conocimiento: reglas, técnicas, destrezas, conceptos previamente adquiridos y un sistema de creencias de cómo conciben los estudiantes a las matemáticas y sus mé-

todos, para dar una solución a una situación nueva. Por todo lo anterior, algunos notables matemáticos como Polya (1945-1990) y Schoenfeld (1985) consideran a la resolución de problemas como la verdadera ciencia de las matemáticas, y que ésta es la forma más elevada de aprendizaje.

Sin embargo, la resolución de problemas es una compleja actividad que requiere la aclaración de varios aspectos, tales como dar respuestas a las interrogantes: ¿qué es un problema?, ¿qué es la resolución de problemas?, ¿por qué enseñar la resolución de problemas?, ¿cuándo enseñar la resolución de problemas en el salón de clases?, ¿qué hace un buen resolutor de problemas?, ¿cómo diseñar excelentes problemas?, ¿cómo enseñar la resolución de problemas?, que son cuestiones básicas sobre su estudio.

## 1.2 Una breve historia de la resolución de problemas

Schoenfeld (1987) menciona que 1945 fue el año de la resolución de problemas: Max Wertheimer escribe *Pensamiento productivo* (un estudio clásico de solución problemas; el primero de los publicados); Karl Dunker escribe la *resolución de problemas*, y, lo más importante, en ese año también aparece la obra de George Polya, *How to solve it*, primero de una serie de volúmenes sobre la naturaleza del pensamiento matemático, tema sobre el que trabajaría duramente en los años posteriores.

Para la educación matemática (y para el mundo de la resolución de problemas), 1945 es la línea divisoria entre dos eras: antes y después de Polya, por la gran influencia que ha ejercido este gran teórico en el pensamiento matemático de nuestros días.

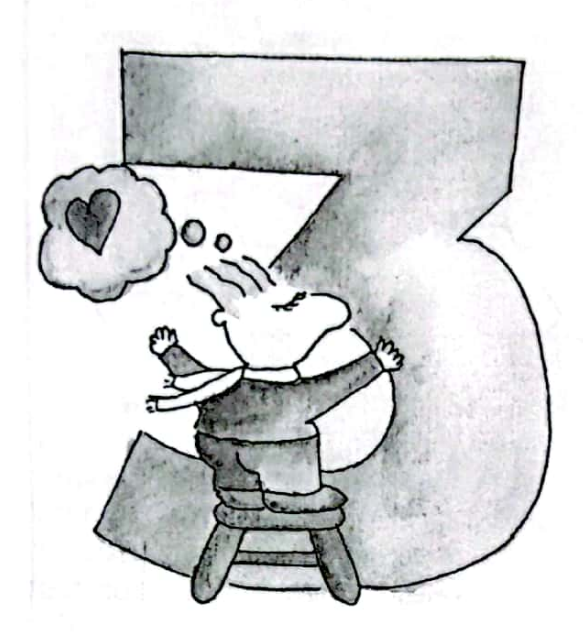
Uno de los propósitos de esta sección consiste en rastrear esta influencia para ver hasta dónde puede conducirnos, así como ofrecer al lector un panorama general de la historia y las ideas que han surgido al respecto, con el fin de buscar un modelo que pueda servir como referencia cuando se analice el trabajo mostrado por los alumnos.

### *1.2.1 La resolución de problemas antes de Polya*

Los filósofos, como estudiosos que son del pensamiento, se han preocupado por las matemáticas, un ejemplo de ello lo encontramos en la Grecia antigua, cuna de la "matemática racional", basada en un sistema hipotético deductivo, concepción completamente opuesta a la de la matemática antigua. Zubieta (1975) ilustra esta concepción con un ejemplo tomado del diálogo *Menón,* de Platón, donde Sócrates muestra a un esclavo el dibujo de un cuadrado, y le pregunta: "¿Qué debo hacer para construir un cuadrado cuya área sea el doble de la del cuadrado dado?". A cada respuesta, Socrátes continúa haciendo preguntas hasta que el esclavo descubre por sí mismo el error.

Sin duda, como se puede apreciar en el diálogo, este modelo de enseñanza de resolución de problemas se basa en una conceptualización platónica de las matemáticas. A saber: el conocimiento debe residir no en el

cuerpo sino en el alma, la cual es inmortal. En el alma reside todo el conocimiento, sólo se necesita ser "recordado". Este conocimiento es, además, eterno, bello y perfecto.



Otro ejemplo lo propone Schoenfeld (1987) y lo ubica 2 000 años después en la Francia de Descartes. Hay una poderosa razón para detenerse con Descartes. Fue un gran matemático que explicó su conceptualización del "pensamiento productivo" en general y de pensamiento matemático en particular. Su plan era muy simple: planteó tres fases, por medio de las cuales uno podría pensar a la manera de su genio creador y así, siguiendo sus pasos, la mayoría de los mortales podría resolver problemas como él lo había hecho.

La *Fase I* la dedicó al álgebra. Su idea fue reducir cualquier problema algebraico a la solución de una simple ecuación. La *Fase II* está dedicada a problemas matemáticos más complejos: reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico, el cual ya se puede resolver usando simplemente las técnicas de la fase I. La *Fase III* está enfocada a lo que hoy denominamos *resolución de problemas.* Aquí la idea es tomar cualquier problema y, por "matematización", reducirlo a un problema matemático, el cual, a su vez, puede ser reducido a un problema algebraico (fase II) y resolverlo por la fase I.

Para cada fase, Descartes planeó doce reglas, aunque en realidad son 12 reglas para la primera fase y 6 de la segunda y la tercera.

He aquí una muestra de las sugerencias de Descartes para pensar metódica y matemáticamente (Descartes, 1990):

"El propósito de nuestros estudios es (regla 1) aprender a hacer juicios sólidos y verdaderos acerca de cuestiones que nos conciernen. Pero debemos (regla 2) ocuparnos solamente de aquellos objetos que pueden ser conocidos por nuestro espíritu de un modo cierto e indudable. Más aún (regla 3), no debemos buscar las opiniones de los demás o las propias conjeturas, sino lo que se puede ver por intuición con claridad y evidencia, o que se puede deducir con certeza, porque no de cualquier modo se adquiere el conocimiento.

Debemos ser sistemáticos (regla 4): el método es necesario para la investigación de la verdad. El método (regla 5) consiste en el orden y la disposición de las cosas a las que debemos dirigir el espíritu para descubrir alguna verdad. Esta se encontrará si reducimos las proposiciones oscuras y confusas a otras más sencillas..."

Descartes, menciona Schoenfeld,

plasmó esta gran empresa en su obra *Reglas para la dirección de la mente,* y ahí se encuentran los gérmenes de las "heurísticas de Polya". Las ideas de Descartes influyeron poderosamente por más de dos siglos. Dewey (1888) dijo lo siguiente: "sobre el método de Descartes... no se necesita decir mucho. Fue el método del pensamiento continental hasta los tiempos de Kant" (Schoenfeld, 1987).

Schoenfeld (*ibid.*) aporta un tercer ejemplo y lo relaciona con las contribuciones del Dr. Franz Joseph Gall.

Franz Gall es el precursor de la frenología, "ciencia" basada en la suposición de que las facultades mentales se localizan en partes específicas del cráneo. Si una parte del cráneo (ver figura 1) se desarrolla, entonces el sujeto será "bueno" en esa área específica.

Por el contrario, si esa parte no se desarrolla, entonces el sujeto será débil en esa área. Las secciones relevantes para la competencia matemática se ilustran en la figura 2; ahí se muestra cómo están ubicados la causalidad, la continuidad, el orden y el método, y el cálculo.

Finalmente, las consecuencias de esta teoría se ilustran en la figura 3, donde un individuo sería competente en matemáticas, y el otro, completamente incompetente.

Esta pseudociencia aparece ante los ojos modernos como pura charlatanería; sin embargo, en su época significó un avance. Schoenfeld menciona que, en ocasiones, las pseudociencias proveen un medio de racionalización del *statu quo,* o de la justificación o perpetuación de las injusticias (ver fig. 4).

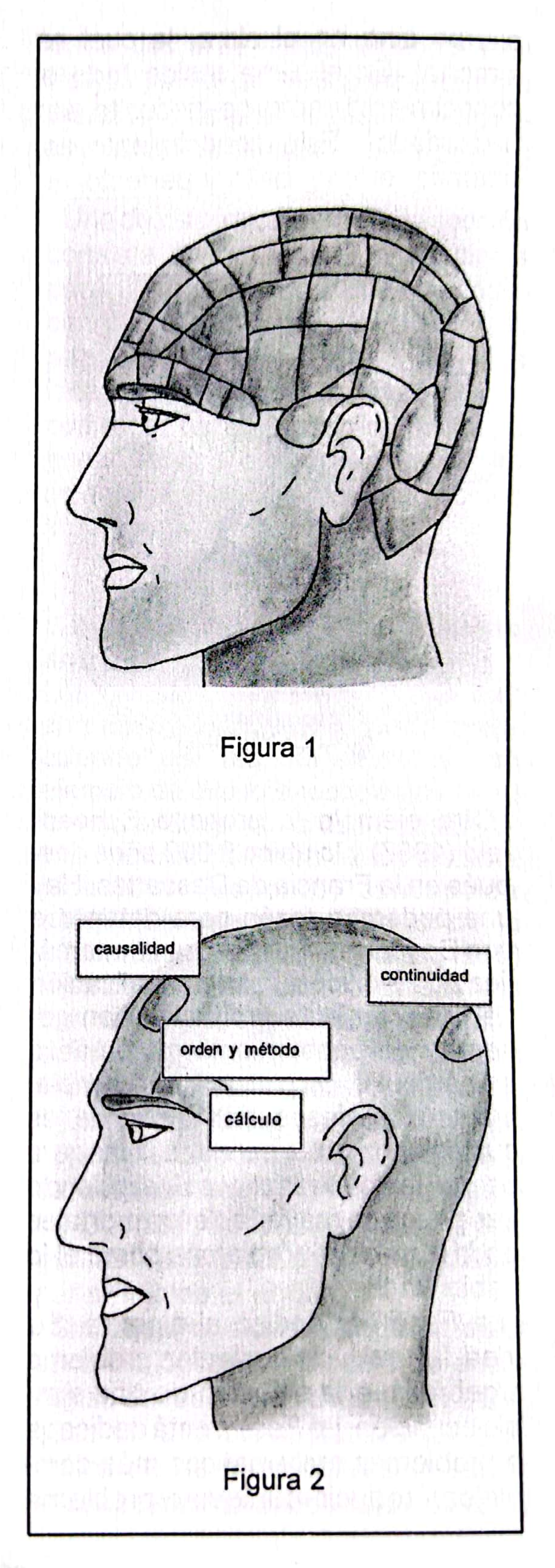


Figura 1

Figura 2

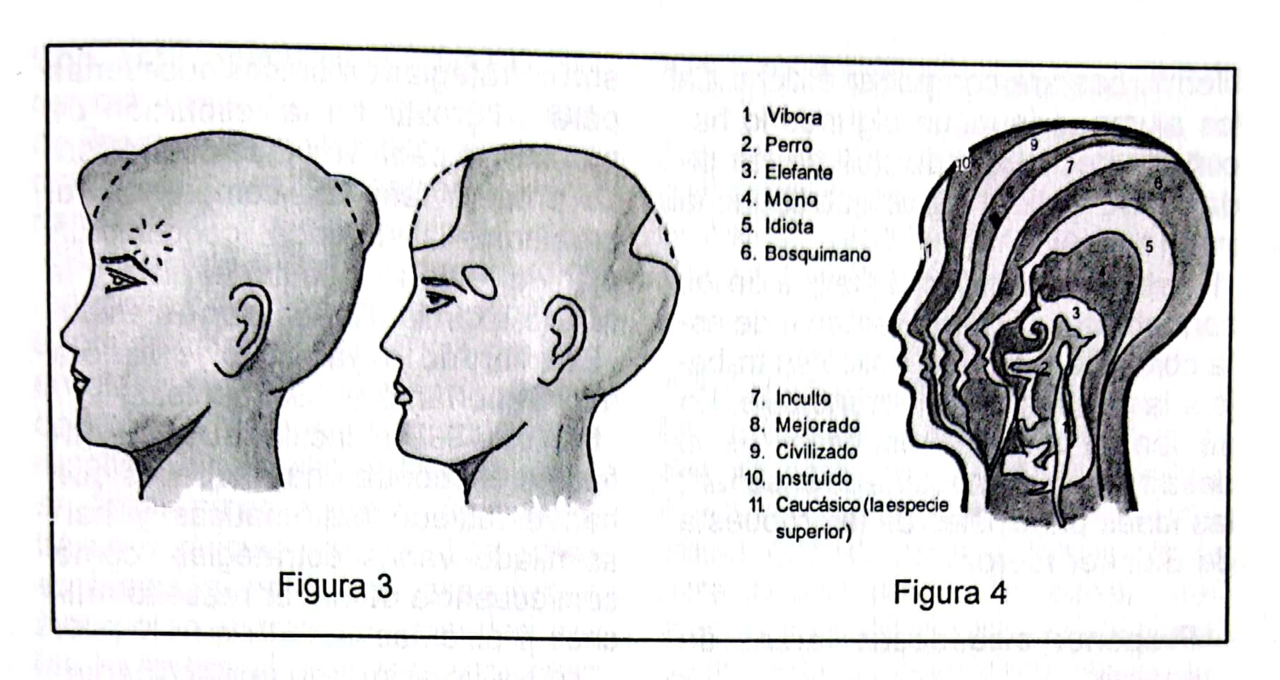


Figura 3

Figura 4

¿A dónde ir ahora? Habiendo explorado el cráneo del Dr. Gall, ahora conviene echarse un clavado en el interior del cráneo de los gestaltistas europeos, como lo sugiere Schoenfeld con su fino humor (*íbid.*)

Schoenfeld dice que los gestaltistas europeos crearon un modelo de resolución de problemas codificados, que puede verse en *El arte de pensar,* de Graham Wallas, en 1926. Las cuatro fases de la resolución de problemas, de acuerdo con los gestaltistas, son las siguientes:

1. *Saturación.* Usted debe trabajar el problema hasta saturarse. Así podrá resolverlo.
2. *Incubación.* Saque de su mente consciente el problema y póngalo al servicio de su subconsciente.
3. *Inspiración.* La respuesta viene hacia usted como un resplandor.
4. *Verificación.* Verifique la respuesta para estar seguro de ella.

Con este sencillo modelo, los gestaltistas describen una gran cantidad de ejemplos de resolución de problemas. Más aún, se preocuparon por la estructura matemática profunda. Por ejemplo, las discusiones de Wertheimer (1945 / 1991) sobre el "problema del paralelogramo" en su libro *Pensamiento productivo,* son una maravillosa obra de exposición de esta estructura.

Schoenfeld (1987) menciona que si bien los gestaltistas hicieron grandes aportaciones a la resolución de problemas, su modelo deja mucho que desear, ya que "el subconsciente es inaccesible para escudriñar y para manipular; eso no nos deja mucho por hacer". Suponiendo que la solución de un problema emerge del subconsciente, los gestaltistas no pudieron explicar ¿cómo emerge?, ¿por qué emerge? Desde el punto de vista de la enseñanza de la resolución de problemas, este modelo se enfrenta a retos mayores. La fase 1 de saturación no sería problema; los alumnos están acostumbrados a ello (en la metodología tradicional). La fase 2 tampoco representará pro-

blema: bastará con poner a dormir a los alumnos (aunque algunos lo hacen sin necesidad de que se les pida). Pero ¿cómo lograr que llegue la inspiración?...

Finalmente, veremos la teoría de los conductistas. El representante de esta corriente, Skinner, aplicó su trabajo a la psicología del aprendizaje. En su forma pura, el resultado fue el desarrollo de la "máquina de enseñar"; las ideas principales de la propuesta de Skinner fueron:

- Proponer cuidadosas tareas de análisis.
- Reforzamiento.

Esta última idea, la del reforzamiento, es la que motiva que todavía en muchas escuelas se siga premiando a los niños con "estrellitas de oro", lo que demuestra que Skinner fue el psicólogo que tuvo mayor influencia en ciertas prácticas de la enseñanza, sobre todo en América, donde la solución de problemas se enseña con base en el ejercicio y la práctica como una cadena de estímulos-respuestas. Es dentro de este contexto que aparece Polya.

### *1.2.2 Polya, la "heurística moderna" y su influencia*

Como ya se mencionó, Polya hace su aparición en el mundo de la resolución de problemas y de la pedagogía en 1945, con su libro *How to solve it*, en el que ofrece una descripción de 4 fases para la resolución de problemas, y hace sugerencias en cuanto a los detalles para implantarlas en las que llama "heurísticas modernas" y que son estrategias empíricas necesarias para progresar en la resolución de problemas cada vez más complejos. La primera fase es: comprender el problema; la segunda: concebir un plan; la tercera: ejecutar el plan, y la cuarta: examinar la solución obtenida.

Este libro de Polya influyó de manera muy importante en Schoenfeld.

Santos (1992) menciona que Schoenfeld se encuentra entre aquellos que han estudiado matemáticas y han asimilado varias estrategias, como consecuencia de haber resuelto muchos problemas.

"Yo las he asimilado por accidente, en virtud de haber resuelto miles de problemas durante mi carrera (esto es, yo he sido 'entrenado' por la disciplina; recogiendo pedazos y piezas del pensamiento matemático es como me fui desarrollando)".

Aunque Schoenfeld reconoce el potencial de las estrategias planteadas por Polya, menciona Santos: "se dio cuenta que los estudiantes que reciben entrenamiento para las competencias en matemáticas en Estados Unidos no usan las ideas de Polya".

El principal método que utilizan los entrenadores en este tipo de competencias es que "uno aprende a resolver problemas exitosamente, en la medida que se resuelve un gran número de problemas" ( Schoenfeld, 1979). En el análisis de las desventajas de este método, Schoenfeld indicó que algunos estudiantes pueden tener éxito con este método cuando resuelven problemas en el mismo contexto, pero que a menudo experimentan dificultades cuando el contexto del problema es diferente.

Con esta perspectiva, Schoenfeld decidió investigar por qué las ideas de Polya no daban buenos resultados o por qué no se utilizaban en el entrenamiento de los estudiantes.

"Schoenfeld revisó algunos estudios realizados en ciencias cognocitivas e inteligencia artificial. Encontró que en estas disciplinas se han producido programas que son capaces de resolver con mucho éxito problemas en áreas como ajedrez, lógica simbólica y cálculo integral. Las ideas empleadas en estos programas incorporan estrategias creadas por los expertos al resolver problemas. Para describir, y posteriormente codificar las actividades usadas por expertos, se emprende una observación matemática del proceso que ellos utilizan al resolver los problemas" (Santos, 1992, pág. 18).

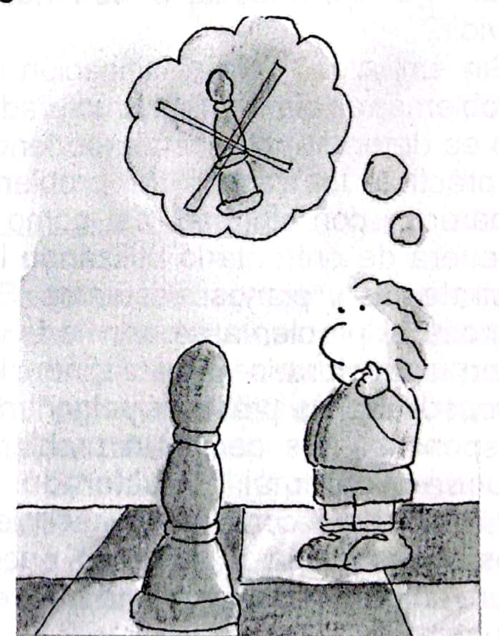
Schoenfeld mencionó que para entender el proceso usado por resolutores de problemas matemáticos y proponer direcciones para la instrucción de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje, junto con el proceso de pensar. Es decir, que es importante la incorporación del conocimiento de los matemáticos, los profesores de matemáticas, educadores y científicos del conocimiento (Santos, 1992). Cada uno de ellos tiene un aspecto por cubrir para entender el procesode resolución de problemas de los estudiantes. Por ejemplo, en la actualidad, y tomando en cuenta las consideraciones de Schoenfeld, se sabe que un buen resolutor de problemas aplica una amplia gama de heurísticas.

## 1.3 ¿Qué es un problema?

A pesar de que no existe un acuerdo generalizado acerca de la noción de problema, cabe hacer unas precisiones para aproximarse a ésta.

### *1.3.1 No hay un camino fácil*

Un problema es una situación a la que se enfrenta un individuo (niño, joven, adulto, etc.) o un grupo de individuos que requieren una solución y para la cual parece no existir una manera clara de lograrlo. Así, la clave de las distintas posiciones está en la frase "No hay un camino fácil para lograr una solución".



### *1.3.2 Problemas estructurados vs. problemas no estructurados*

Dado que el término "problema" es de uso común en la vida diaria (por ejemplo, al escuchar "Tengo un problema en mi casa", "Yo tengo un problema en mi trabajo", "El problema

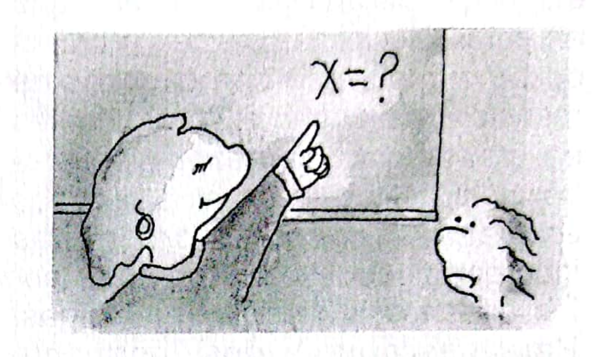
es que no sé cual producto resulta más barato", etc.), es conveniente hacer otra precisión: los problemas que nos encontramos en la vida diaria pueden clasificarse en *bien estructurados* y *mal estructurados.* Los primeros se presentan claramente y contienen toda la información y las estrategias necesarias para garantizar una solución correcta. Por el contrario, los problemas mal estructurados son aquellos en los que no se dispone de toda la información. Puede no haber una clara estrategia o una sola respuesta que pueda verse como la correcta, por ejemplo: ¿Cuál es el mejor juguete que podemos comprar? ¿Cómo enseñar a los niños a dividir?, etc.

Sin embargo, esta clasificación de problemas en bien o mal estructurados no es determinante; con experiencia y práctica, los rasgos del problema aparecen con claridad, así como la manera de enfrentarlo utilizando las estrategias y planes existentes. Entonces el problema se convierte en bien estructurado y se definen los procedimientos, prácticas y algoritmos disponibles. Es decir, un problema puede estar mal estructurado de entrada, pero con más conocimientos, experiencia y práctica, puede convertirse en un problema bien estructurado.

### *1.3.3 Tipos de problemas*

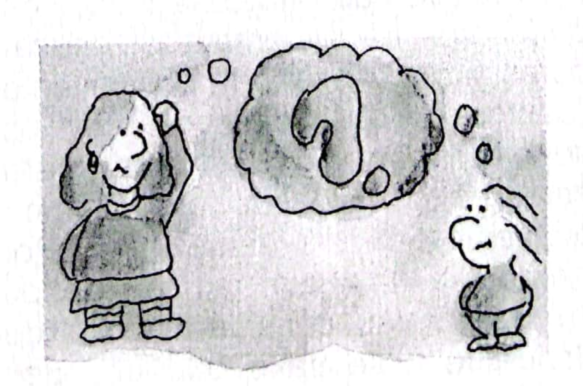
Maker J. (1986) hace una clasificación de problemas de acuerdo con lo cual propone un modelo de atención a la población sobresaliente:

*Problemas tipo I.* El problema y el método de solución son conocidos por el maestro y el niño, pero la solución o respuesta correcta sólo la conoce el maestro (problemas rutinarios).

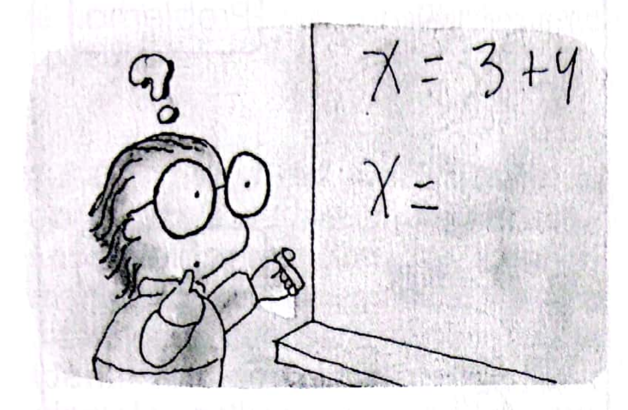



*Problemas tipo II.* El problema es conocido por el maestro y el niño, pero el método de solución y la respuesta correcta son conocidos sólo por el maestro (problemas semirrutinarios).

*Problemas tipo III.* El problema es conocido por ambos, pero el método y la(s) solución(es) son desconocidos por el maestro y por el alumno (problema descubierto y novedoso).



*Problemas tipo IV.* El problema es desconocido o indefinido para ambos y la(s) solución(es) es (son) desconocida(s) por el alumno (problema descubierto y novedoso).




De acuerdo con el modelo de Maker, se observa que los problemas tipo I, y algunas veces los de tipo II, son los que se enfatizan en la escuela, y en algunos casos excepcionales y para los niños sobresalientes, se consideran los otros tipos de problemas cuyo proceso de resolución requiere altos niveles de pensamiento. En este extremo se encuentran los problemas de descubrimiento. ¡La mayoría de los problemas, actividades y proyectos en la vida personal y profesional son de este tipo!

### 1.3.4 Diferencias entre problema, memorización y ejercicio

Es necesario hacer una cuarta precisión, porque las exigencias cognoscitivas en el aprendizaje de las matemáticas ha llevado a algunos profesores y padres de familia a confundir la retención y la memorización, con el empleo de algoritmos y con los problemas, como sinónimos. Por ejemplo, cuando un profesor confunde con problemas, actividades como:

15. ¿Cuál es la fórmula para encontrar el área de un triángulo?

__________________________

16. Escribe la expresión "mayor que" y "menor que" sobre la raya, en el signo que corresponda.

> ____________ ____________ <

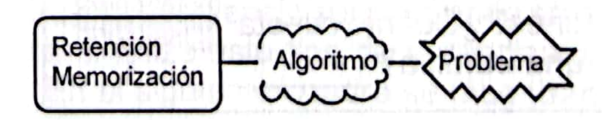
17. ¿Cómo se define un trapecio?

__________________________



En este caso se pide un reconocimiento de ciertos símbolos, hechos y definiciones. Es una situación que el niño puede resolver por retención y memorización.

Otra confusión surge, por ejemplo, cuando un maestro enseña el algoritmo de la suma y luego plantea lo que él considera un problema, como 7 + 5, o 128 + 6. En realidad ésta sería una situación que involucra entrenamiento y práctica para reforzar el algoritmo previamente aprendido por el niño: sería simplemente un ejercicio.



### *1.3.5. Criterios que delimitan la noción de problema*

Un problema es una situación novedosa que requiere un proceso de pensamiento y una síntesis del conocimiento previamente aprendido por el niño, para ser resuelta. Por esta principal razón, un problema primero debe ser percibido como tal por los estudiantes. En otras palabras, un problema puede ser reconocido como tal por un determinado individuo y puede no serlo para otro, dependiendo de si el estudiante rechaza o acepta el desafío. Por ejemplo, el siguiente problema puede serlo para determinados niños y no serlo para otros.

**Problema**
De un árbol salieron volando 5 pajaritos pero quedaron 3. ¿Cuántos pajaritos había en el árbol?

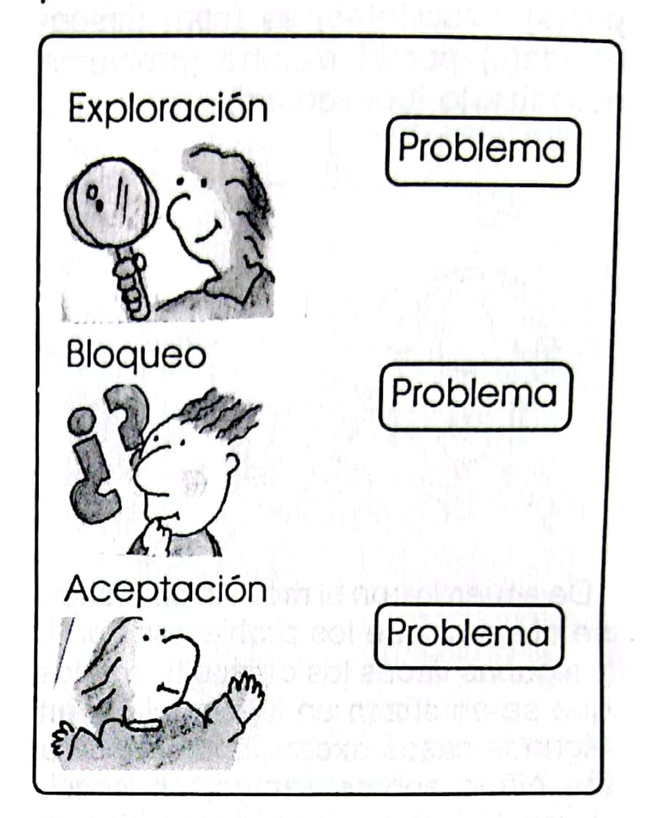
____________________

Resulta difícil concebir que un niño de sexto grado de primaria perciba la situación anterior como un problema. Más bien se esperaría que ese niño reconociera como problema una situación como la siguiente:

**Problema**
Raúl compró 4 pares de calcetines y 2 camisas por N$ 64.00; Elena compró 1 camisa y 1 par de calcetines por N$ 24.00. ¿Cuánto cuesta 1 par de calcetines? ¿Cuánto cuesta una camisa? ______



Criterios para la categoría de un problema:




Para que las situaciones anteriores puedan clasificarse como problemas para un niño o un grupo de niños, deben satisfacer los siguientes criterios:

1. *Aceptación*

Los niños están involucrados personalmente, ya sea porque el maestro o los padres lo han motivado, o simplemente porque tiene el deseo de disfrutar con la resolución de un problema.

2. *Bloqueo*

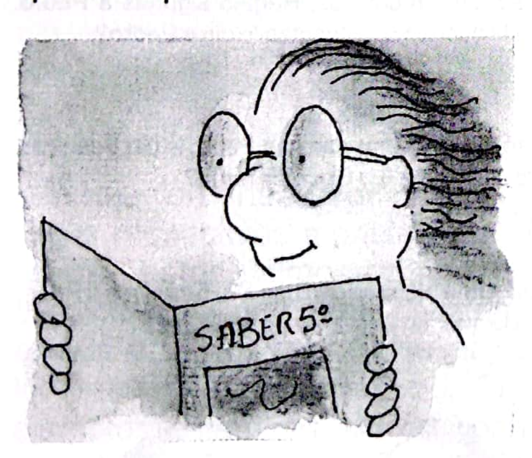
Los intentos iniciales del niño, o del grupo de niños, para llegar a la solución son infructuosos de entrada, y sus respuestas habituales prácticamente no les sirven.

3. *Exploración*

Los niños involucrados racionalmente, como se vio en el criterio 1, exploran nuevos métodos de atacar el problema, y así constituyen algo novedoso.

### *1.3.6 El papel del problema en el aprendizaje de las matemáticas*

Los criterios mencionados anteriormente delimitan una gran cantidad de situaciones que tradicionalmente se identifican como problemas; por ejemplo, solicitar a los niños que sumen los primeros cincuenta números, aplicando únicamente el procedimiento de la suma (1 + 2 = 3), (3 + 3 = 6), (6 + 4 = 10), etc., es una situación que involucra un largo procedimiento. Sin embargo, no será considerado problema si sólo se pide al niño que aplique un procedimiento que ha aprendido.




Muchos problemas rutinarios de este tipo están en los libros de texto. En casi todos los casos se presenta una solución modelo y el estudiante solamente aplica este modelo para resolver una serie de ejercicios similares.

En esencia, los estudiantes que se enfrentan con este tipo de problemas rutinarios, casi no requieren altos niveles de pensamiento, porque sólo necesitan evitar los errores mecánicos o de descuido. Cualquiera de los niños puede seguir el desarrollo de un algoritmo específico, si le dicen cómo resolver una situación similar, tal como se ve en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo resuelto**
Un comerciante recibe 15.250 toneladas de cemento. Vende 8.175 toneladas. ¿Cuántas toneladas le quedan?

*Operaciones*

  15.250
\- 8.175
______
  7.075

*Resultado*
7.075 toneladas

**Problema propuesto**
1. La altura de Pedro es de 1.57 m y la de Antonio es de 1.83 m. ¿Cuál es la diferencia de estaturas?

*Operaciones*

*Resultado*
____________

De acuerdo con los nuevos enfoques, estos problemas se convierten en simples ejercicios o en lo que se ha dado en llamar *problemas rutinarios*, lo que no significa que deban ser eliminados ni de los libros de texto ni del salón de clases, porque tienen una utilidad específica, importante en el aprendizaje de las matemáticas. Su inconveniencia surge cuando sólo se enfatiza este tipo de aprendizaje.

En el siguiente cuadro se muestran

los diferentes tipos de aprendizaje de las matemáticas, necesarios para que los niños sean competentes en esta disciplina; la resolución de problemas ocupa ahí un lugar relevante.

| **Tipos de aprendizaje de las matemáticas** | |
|---|---|
| Retención y memorización | • Palabras (metro, triángulo,...)<br>• Símbolos (+, ×, −, ÷,...)<br>• Hechos numéricos (relaciones, tablas,...)<br>• Fórmulas<br>$A = \pi r^2$,<br>$A = \frac{(B + b)}{2} h$ |
| Empleo de algoritmos | • $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3 + 4}{6} = \frac{7}{6}$<br>• $25 \div 2 = 12$, resto 05 → 1 |
| Aprendizaje de conceptos | • número, porcentaje, fracción,... |
| Resolución de problemas | • En mayor o menor grado, constituye una novedad para el que aprende. |

Estos tipos de aprendizaje se encuentran íntimamente ligados dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, aunque muchas veces sólo se haga hincapié en algunos aspectos. Este trabajo pretende desarrollar una vía correcta y asequible que les permita a los niños alcanzar altos niveles cognoscitivos; por eso se hará énfasis en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

### *1.3.7 Estructura matemática de un problema*

Otro rasgo importante de la naturaleza de un problema matemático es su estructura específica.

Cada problema matemático presenta una organización peculiar de las magnitudes y los valores que lo conforman. Obsérvese la estructura matemática que subyace en los siguientes problemas:

1. José tenía 5 canicas. Le dan 3 más. ¿Cuántas tiene ahora?
$5 + 3 = \square$

2. José tiene 8 canicas. Regala 3. ¿Cuántas le quedan?
$8 - 3 = \square$

3. José tenía 5 canicas. Pedro le regaló algunas. Ahora José tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas le dio Pedro?
$5 + \square = 8$

4. José tenía 8 canicas. Regaló algunas a Pedro. Ahora le quedan 5. ¿Cuántas le dio a Pedro?
$8 - \square = 5$

5. José tenía algunas canicas. Pedro le dio 3 canicas. Ahora José tiene 8. ¿Cuántas tenía?
$\square + 3 = 8$

6. José tenía algunas canicas. Dio 5 canicas a Pedro. Ahora le quedan 3. ¿Cuántas tenía José?
$\square - 5 = 3$



Se observa que, en la estructura matemática de estos problemas, varía la posición de la cantidad desconocida y la colocación del resultado de la operación.

El suceso o proceso que se describe en el texto ha sido representado bajo la forma de igualdades u operaciones, que son los modelos. El original o lo real, es el texto del problema, y sus modelos, las igualdades.



La relación entre lo original, lo real, y sus respectivos modelos, consiste en que estos últimos reproducen la estructura del problema, considerada en sus aspectos esenciales; es decir, las relaciones cuantitativas. En los ejemplos anteriores, poco importa a la matemática que sea José o Pedro y que se trate sobre canicas. Lo esencial es su estructura matemática.

El paso de lo expresado en el texto o la realidad a su expresión matemática constituye en gran medida lo esencial de la resolución de problemas.

## 1.4 ¿Qué es la resolución de problemas?

### *1.4.1 La resolución de problemas es un proceso*

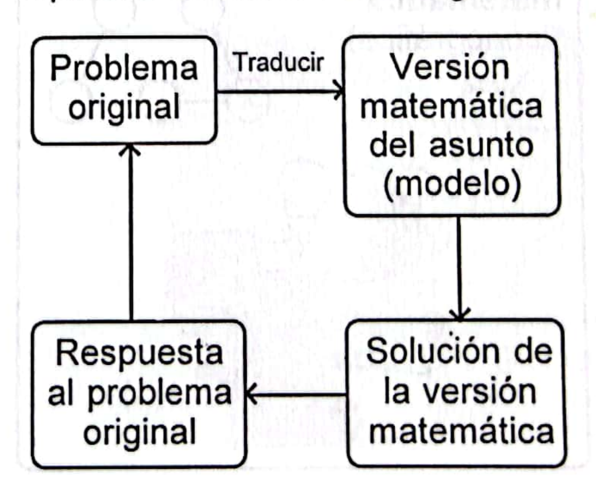
Es el medio por el cual un individuo usa previamente el conocimiento adquirido, las habilidades y la comprensión, para satisfacer las condiciones de una situación no familiar. Este proceso empieza con la confrontación esencial y concluye cuando se ha obtenido una respuesta de acuerdo con las condiciones iniciales.

El estudiante debe sintetizar lo que ha aprendido y aplicarlo a la nueva y diferente situación.

### *1.4.2 Esquema del proceso de resolución de problemas*

Usualmente, un problema matemático es planteado en palabras (oralmente o por escrito). Entonces, para resolver el problema uno traduce estas palabras a un problema equivalente (usando símbolos matemáticos), resuelve este problema e interpreta la respuesta.

Este proceso no es novedoso: ya lo explicaba Descartes en el siglo XVII.



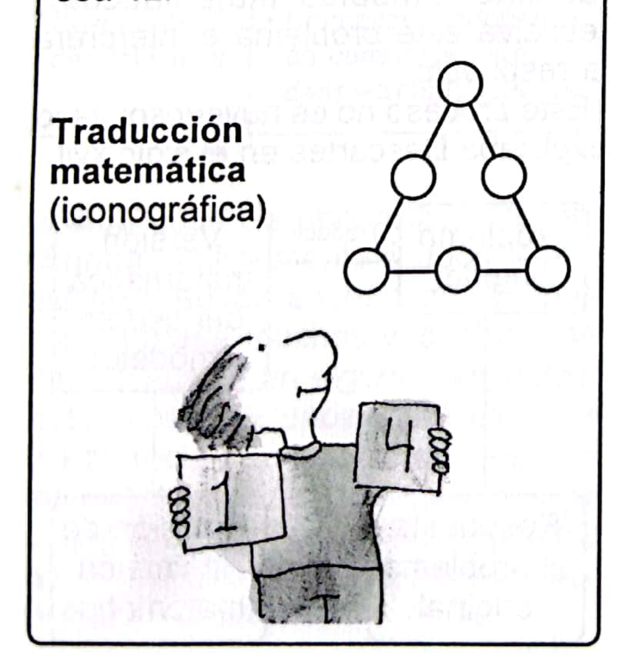
En la realidad, este sencillo esquema se identifica con razonamientos, discernimiento, análisis, síntesis, que son términos o categorías propias de la actividad mental, en general, y del pensamiento, en particular.

### *1.4.3 Ejemplo del proceso de resolución de un problema*

A continuación se ilustra con un ejemplo el proceso de resolución de un problema, cuando se utiliza un modelo gráfico como traducción del problema original. En este caso la versión original verbal se traduce a un formato gráfico, a partir del cual se inicia el proceso de resolución de problemas utilizando la estrategia de *adivinar y probar*, con tres niños de diferentes niveles y edades.

**Problema**
Ubica los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en los círculos de una figura triangular, para que la suma de los tres números de cada lado del triángulo sea 12.

**Traducción matemática**
(iconográfica)

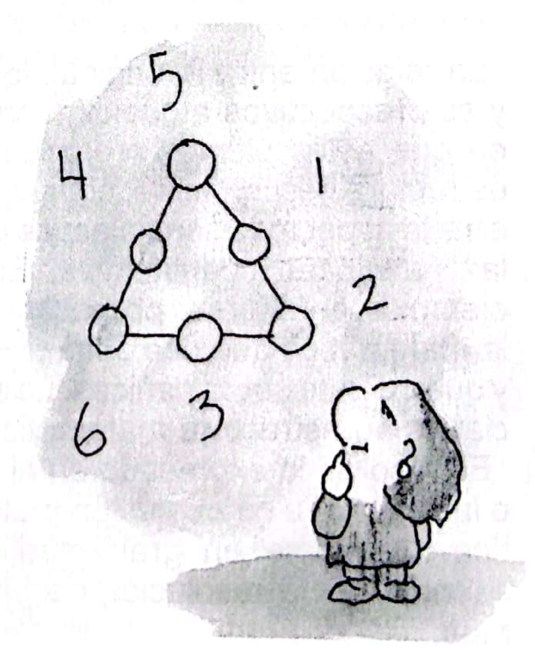



Para resolver este problema se ilustrarán tres formas diferentes, utilizando la estrategia de "adivinar y probar", la cual consiste en adivinar una posible solución y comprobar si se está en lo correcto; en caso de no haber acertado, se repite el procedimiento hasta obtener la solución correcta.

El proceso de resolución de problemas inicia cuando un niño se enfrenta con éste y lo hace suyo, es decir, lo acepta como tal y sus intentos iniciales para llegar a una solución son infructuosos. Una forma esquemática de explicar este proceso sería la siguiente:

*Etapa 1: Entender el problema*

El niño que se enfrenta al problema debe entenderlo totalmente; en este caso se le pide que use cada dígito exactamente una sola vez para colocarlos en el triángulo, y que la suma de los tres números de cada lado debe ser 12.

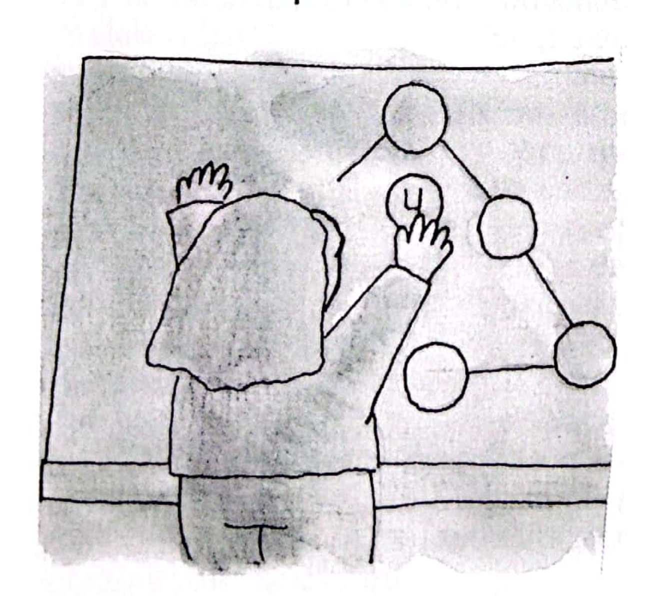


*Primera solución de un niño*

*Etapa 2: Concebir un plan*
A un niño se le ocurrió recortar 6 pedacitos de papel y numerarlos del 1 al 6. Luego intentó probar una serie de combinaciones.



*Etapa 3: Ejecutar el plan*
El niño acomodó los pedacitos de papel en los círculos de la figura triangular y verificó las sumas. Así mantuvo los reacomodos hasta que dio con la solución.

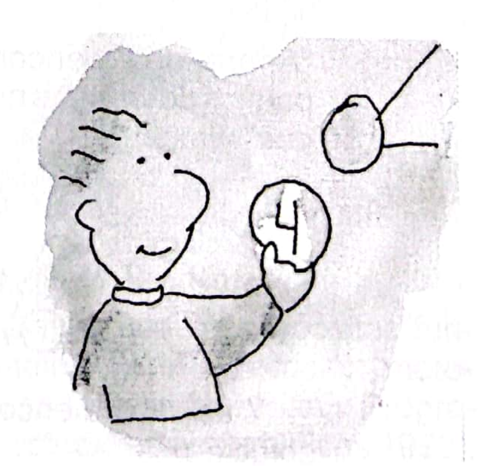


*Segunda solución de otro niño*

*Etapa 2: Concebir un plan*
Este niño, en lugar de mover fortuitamente los números, pensó en fijar los más pequeños (1, 2, 3) en las esquinas. Si esto no funciona, entonces probaría con los otros números.




*Etapa 3: Ejecutar el plan*
Con los números 1, 2, 3 en las esquinas, el niño observó que obtenía sumas muy pequeñas y que ocurría lo mismo con 1, 2, 4; así que empezó a fijar otras tercias un poco mayores, como 3, 4, 5, y así, sucesivamente, hasta encontrar la solución.



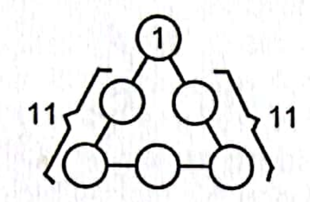
*Tercera solución*

*Etapa 2: Concebir un plan*

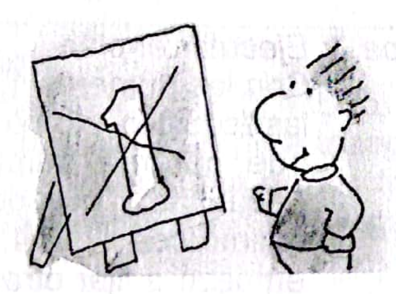
Un tercer niño tuvo este plan: "Fijo un número en una esquina y veo cómo deben ir los otros".

*Etapa 3: Ejecutar el plan*

Si el 1 se fija en la esquina, entonces debemos encontrar 2 parejas de los otros números que sumen 11.

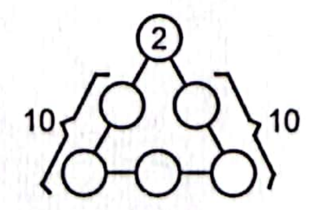



"Sólo existen el 6 y 5. No sirve el 1."



"Por lo tanto, pasaré a probar con el 2, fijándolo en una esquina."

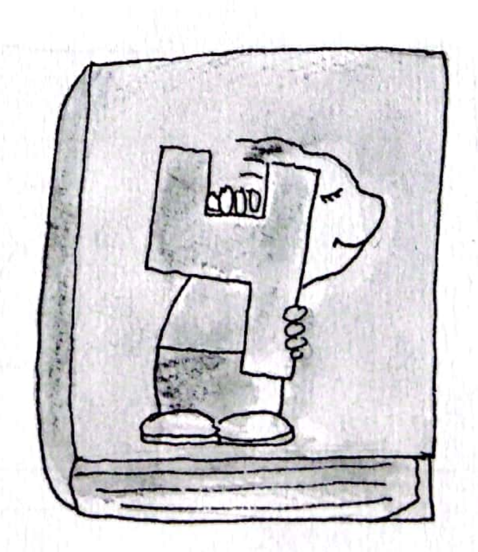
"Ahora debo encontrar 2 parejas de los otros números que sumen 10."




...Y así, hasta encontrar la solución.

### *1.4.4 El proceso de resolución de problemas desde el punto de vista pedagógico*

En el ejemplo anterior, las estrategias de los niños al abordar el problema fueron diferentes, de acuerdo con su nivel escolar y edad, pero todos asumieron desde el principio que lo que tenían enfrente era un problema y que además querían resolverlo. En efecto, después de algunos tropiezos lograron hacerlo. Esta actividad es lo que se denomina *proceso de resolución de problemas*, y puede explicarse desde distintos puntos de vista: pedagógico, psicológico, matemático, y desde el punto de vista de la inteligencia artificial. El que se adoptará en este libro es el pedagógico, mejor dicho el de la "educación matemática", porque se enfoca a la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos y no de los problemas en general. Además del maestro, el resolutor de problemas (el niño) está inmerso en la escuela, que es donde se estimula el aprendizaje mediante situaciones didácticas.



## 1.5 ¿Por qué enseñar la resolución de problemas?

Para tratar de explicar por qué debería enseñarse la resolución de problemas, primero se debe considerar la cuestión general: ¿Por qué enseñar matemáticas?, y aquí surge un tema que ha provocado permanentemente una polémica dentro del mundo educativo y que radica en distinguir entre lo que le es útil aprender al niño y lo que es deseable enseñarle.

### *1.5.1 Requerimientos sociales vs. requerimientos individuales*

El concepto de utilidad está ligado al concepto de futuro. Se forman niños que serán los ciudadanos y profesionales del futuro y que requerirán una cultura matemática que les permita: tener una visión histórica e interdisciplinaria de esta ciencia; aplicar los contenidos matemáticos para diseñar modelos en sus respectivas áreas de interés (ingeniería, contaduría, medicina, arte, etc.); ser capaces de crear y resolver problemas reales y usar los diferentes lenguajes y representaciones que brinda la matemática. En pocas palabras se diría que se busca que los niños desarrollen su potencial, en bien de la sociedad que hace posible su educación.

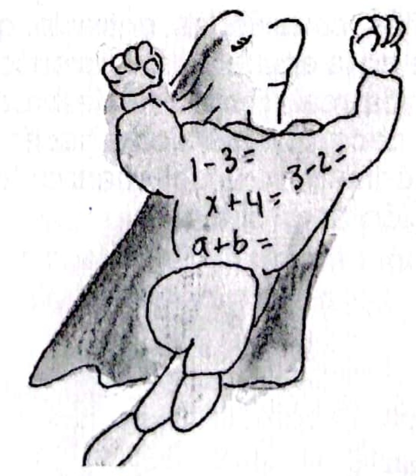
Evidentemente, en la enseñanza de las matemáticas es deseable, aquello que es útil, pero también es muy importante la realización del potencial del niño, por el bien de éste; es decir, respetar su individualidad. Esta aparente contradicción debe superarse y traducirse en una respuesta curricular de cualquier sociedad.

Por ejemplo, los nuevos objetivos sociales que señala la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, de Estados Unidos de América) exigen:

1. Trabajadores con educación matemática.
2. Aprendizaje continuo.
3. Oportunidad para todo el mundo y
4. Unos electores bien formados.

Con respecto a las metas individuales de los estudiantes, la NCTM señala lo siguiente:

1. Que aprendan a valorar las matemáticas.
2. Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas.
3. Que lleguen a resolver problemas matemáticos.
4. Que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas.
5. Que aprendan a razonar matemáticamente.



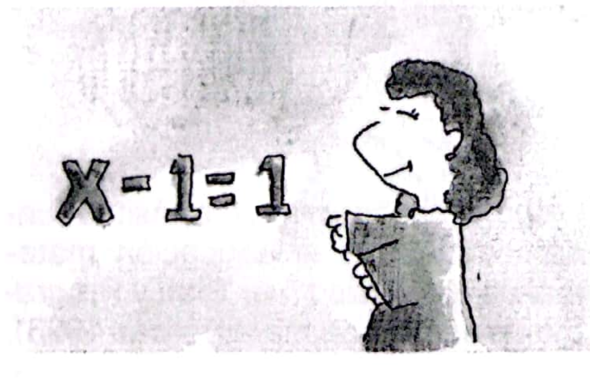

Algo similar son los propósitos fundamentales de la educación matemática en México (ver Plan y Programa de estudio de matemáticas 1993).

### *1.5.2 Problemas reales vs. problemas de texto*

Otra razón poderosa para enseñar y aprender matemáticas es que, según se dice: "Las matemáticas son fundamentales para la vida diaria".

Ésta es una frase de uso común porque, en efecto, todos nos enfrentamos a problemas, cuantitativos y de otro tipo, todos los días de nuestra vida. Pero cuando comparamos los problemas escolares, mejor dicho, los problemas de texto con los problemas de la vida cotidiana, observamos que un profundo abismo los separa. En el mercado, en la tienda, en los cines, nunca encontramos situaciones problemáticas en donde se le indique al niño, como en el texto, lo que debe hacer. Ahí es donde el niño debe apelar a sus propios recursos. Por esta razón, la resolución de problemas debe proveer el vínculo entre los hechos y algoritmos matemáticos y los problemas de la vida real que diariamente se presentan.

A decir verdad, en la gran mayoría de los textos sólo se ven algunas pequeñas conexiones entre lo que sucede en la escuela y lo que sucede en la vida real. Reducir esta brecha quiere decir que se debe hacer un mayor énfasis en la enseñanza de la resolución de problemas.




### *1.5.3 La interconexión de contenidos*

Otro argumento de peso para promover la resolución de problemas en el salón de clases, es que por medio de este proceso se muestra permanente la interconexión entre las diversas ideas matemáticas,• en clara oposición a la manera tradicional de las lecciones que tratan un determinado aspecto que ya no se vuelve a retomar en lecciones posteriores. Los problemas, sobre todo los excelentes problemas, pueden ser usados para revisar y evaluar las ideas matemáticas con que cuentan los estudiantes y también para sembrar las ideas que serán presentadas en el futuro.




•Éste es el enfoque que permea las lecciones de los libros de texto gratuitos de matemáticas. Ver, por ejemplo, las lecciones de quinto grado de primaria.

### *1.5.4 Las actitudes hacia las matemáticas*

Un argumento más en favor de la enseñanza de la resolución de problemas está ligado con la motivación. Expliquémoslo. Es de todos conocido que la práctica educativa más extendida en el salón de clases es aquella donde los niños asumen un papel receptivo de aprendizaje. Los maestros inducen a los niños en una rutina de trabajo que es asimilada desde los primeros grados. Las lecciones matemáticas están dominadas plenamente por el maestro, quien revisa conocimientos previos, explica y demuestra procedimientos nuevos; la explicación es seguida por los niños en forma rutinaria con ejercicios de lápiz y papel. El resultado de este modelo de enseñanza lo conocemos de sobra. De ahí se desprende la frase tan común de "las matemáticas son aburrridas, áridas y difíciles".




La resolución de problemas, por el contrario, resulta más excitante, más desafiante y más interesante para los niños, que los ejercicios áridos; propicia una nueva actitud hacia ella.

Todo maestro sabe, por observación cotidiana, que los pequeños éxitos de sus alumnos, ante una situación problemática, los llevan a la aceptación, persistencia y continuación de esa tarea. Los fracasos rotundos o cuando el maestro les dice lo que tienen que hacer los llevan a la rutina, al aburrimiento y, por consiguiente, al rechazo de esa tarea. Una enseñanza sin sentido de la resolución de problemas probablemente arrojará iguales o peores resultados que la enseñanza de ejercicios y algoritmos. Por ello se debe hacer una cuidadosa secuencia seleccionada.

### *1.5.5 El uso de estrategias*

La enseñanza de la resolución de problemas es importante porque permite que los estudiantes, durante su educación, aprendan y practiquen una serie de "heurísticas" (estrategias ingeniosas para llegar a un fin), tales como:

1. Adivinar y probar
2. Usar una variable
3. Observar un patrón
4. Hacer un enlistado
5. Resolver un problema más simple
6. Dibujar
7. Hacer un diagrama
8. Usar un razonamiento directo
9. Usar un razonamiento indirecto
10. Trabajar hacia atrás

Algunas estrategias pueden transferirse a otros problemas de contextos diferentes. Así, por ejemplo, la estrategia de "dibujar una figura" puede ser útil para resolver una variedad de problemas de física, biología, ciencias sociales, etcétera.

Se ha comprobado que actualmente los niños y adolescentes sólo utilizan las estrategias de hacer operaciones (suma, resta, multiplicación, división y sus combinaciones).

## 1.6 ¿Cuándo enseñar la resolución de problemas en el salón de clases?

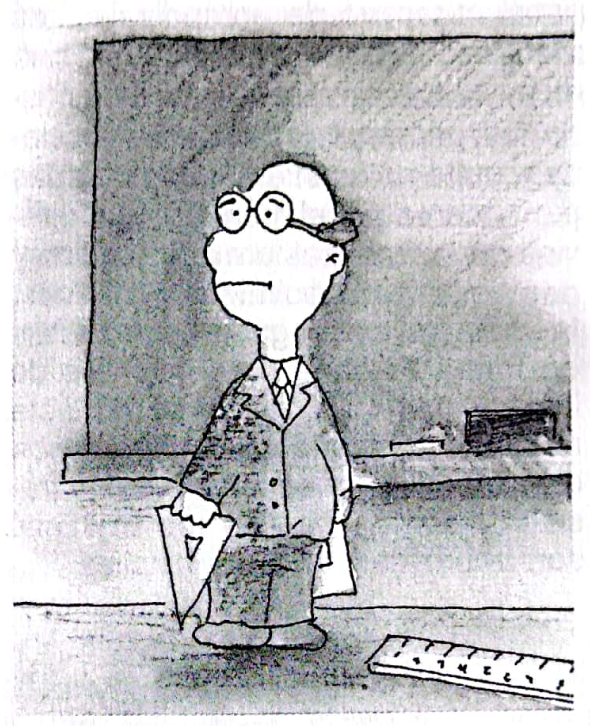
### *1.6.1 La resolución de problemas debe enseñarse desde la educación preescolar*

Como se ha dicho anteriormente, la resolución de problemas es una habilidad que todo el mundo usa en su vida. Por ello su enseñanza debe empezar cuanto antes, dentro de los sistemas escolarizados y continuar a través de toda la vida escolar, ya que es responsabilidad del maestro, y de la escuela en general, el optimizar este proceso, aproximándolo sucesivamente a los nuevos saberes escolares.




### *1.6.2 La enseñanza de la resolución de problemas debe apoyarse en el ambiente*

Dada la naturaleza de los problemas, los profesores de preescolar, primaria, secundaria y bachillerato disponen de material. Sólo hace falta sintetizar su enseñanza a lo largo de estos niveles.



### *1.6.3 Propuestas didácticas para la resolución de problemas*

En los últimos quince años, la propuesta de aprender matemáticas a través de la resolución de problemas ha estado presente en el ambiente educativo en algunos países. Sin embargo, en la práctica se han podido identificar diversas posiciones acerca de cómo realizarlo.

Kilpatrick (1985) resume el uso de la resolución de problemas en tres direcciones, y le corresponde al maestro decidir cuál seguir, de acuerdo con las condiciones específicas de la escuela y con los currículos oficiales.

• En la primera dirección, los problemas se analizan como un vínculo para lograr algunas metas curriculares. Estas metas pueden incluir aspectos relacionados con la motivación, la recreación, la justificación y la práctica.
• La segunda dirección consiste en la resolución de problemas como una de las tantas habilidades que se debe enseñar en el currículo.
• La tercera dirección considera a la resolución de problemas como el arte de simular la actividad matemática dentro del salón de clases.

Esta última es, según Schoenfeld (1987) y Santos (1993) la más apropiada para enseñar y aprender matemáticas. Es decir, aprender matemáticas significa que los niños identifiquen, seleccionen y usen estrategias comúnmente usadas por los matemáticos, para resolver problemas y convencer a sus compañeros de que están en lo cierto. Así, por ejemplo, es importante que los niños discutan sus ideas con sus compañeros, que pretendan convencerlos de su verdad, que presenten conjeturas acerca del comportamiento de ciertas ideas matemáticas, que utilicen ejemplos y contraejemplos para convencerse y convencer a otros de los resultados, y diseñar sus propios problemas.

Este punto de vista, además, acepta que las matemáticas son una disciplina falible, cambiante y semejante a otras disciplinas, como lo son todos los productos de la inventiva humana y, por consiguiente, acepta que los niños puedan crear o desarrollar sus propios conocimientos (Santos, 1993).

### *1.6.4. Flexibilidad en la implantación de la propuesta de resolución de problemas*

Una vez que se define una posición ante la resolución de problemas, resultará fácil para el profesor contestar la pregunta de cuándo enseñarla. Por ejemplo, si se considera que es una de las tantas habilidades que se deben enseñar en un currículo implica que en algunos momentos de la clase, y en su nivel, deben tomarse en cuenta aspectos tales como la discusión de los problemas, las soluciones propuestas y los métodos de resolución. Pensemos en el gran porvenir que les espera a los estudiantes involucrados en este proceso.

Obsérvese que en este caso ni siquiera se estaría pensando en dedicarle todo el tiempo a la enseñanza de la resolución de problemas. No sería un sustituto de ciertas habilidades computacionales como saber sumar, restar, multiplicar y dividir con diferentes números, sino, en la medida de lo posible, se trataría de abrir un espacio entre las sesiones formales para la enseñanza de conceptos y algoritmos, para que los niños empiecen a familiarizarse con este proceso, de manera gradual, siempre poniendo énfasis en el mismo, y no exclusivamente en obtener la respuesta.

Asumir la tercera propuesta implicaría romper con muchos modelos tradicionales de enseñanza, e incluso con el tipo de aula y de escuela. Conduciría a un nuevo concepto de escuela: ¡Un nuevo reto educativo!

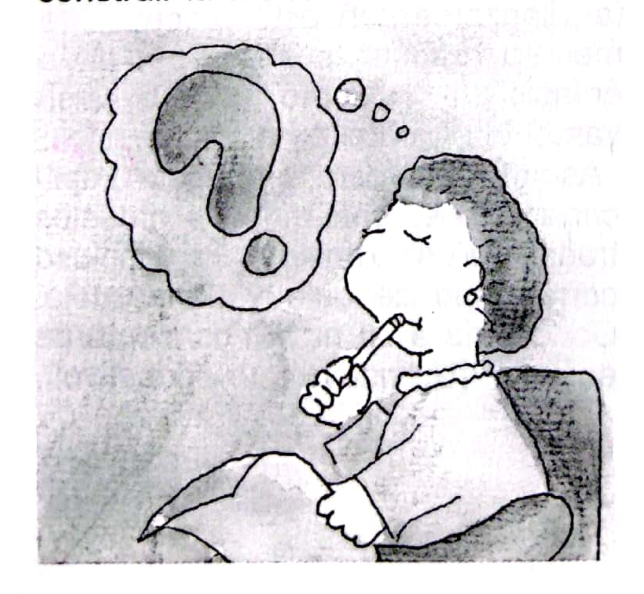
## 1.7 ¿Qué hace el buen resolutor de problemas?

### *1.7.1 Resolutor ideal vs. resolutor de carne y hueso*

A pesar de que no es fácil determinar qué es lo que hacen algunos excelentes estudiantes resolutores de problemas, sí se puede hacer una descripción muy general en una vertiente de índole conceptual y tiene que ver con las tareas generales que un *resolutor ideal* realiza, y las fases que recorre en dicho proceso.

Por resolutor ideal se entiende aquí al que avanza linealmente y sin tropiezos, desde el enunciado del problema hasta su solución, aquel que sabe en todo momento qué hacer y por qué lo hace; aquel que ya para terminar la tarea, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

Una segunda vertiente se relaciona con la observación detallada del proceso de resolución de problemas efectuado por niños reales en el salón de clases, y a partir de ahí empezar a construir la teoría.



### *1.7.2 Hacia un modelo de resolutor de problemas*

Ambas teorías acerca del resolutor se pueden fusionar en la medida que avanza la investigación sobre la resolución de problemas. Un modelo de evaluación que intenta analizar el proceso utilizado por los estudiantes al resolver problemas (y que el profesor puede comprobar) incluye estos componentes:

• Desde el punto de vista conceptual, el resolutor ideal de problemas conoce la *anatomía del problema*; es decir, sabe que un problema contiene ciertos hechos, una pregunta y cierta estructura. También sabe que algunas veces los problemas tienen información extra o que falta información.

Por ejemplo, en el problema que mostramos a continuación, un buen resolutor de problemas observaría que las condiciones dadas no son razonables y no es posible estimar alguna solución.

> **Problema**
> En un salón de clases hay 15 niños y 20 niñas. ¿Qué edad tiene la maestra?

• Otra característica del buen resolutor de problemas es que tiene un *deseo* por resolver problemas, sobre todo aquellos que le interesan y le representan un reto. Mucho se asemeja al reto de un alpinista por escalar el Monte Everest. ¡A los resolutores de problemas les gusta resolverlos porque existen excelentes problemas!

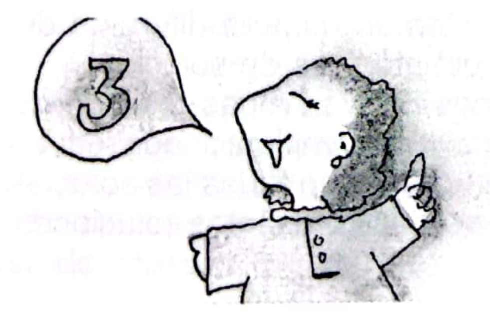
• Los resolutores de problemas son extremadamente *perseverantes o comprometidos con la tarea* cuando resuelven problemas. No se desaniman fácilmente cuando se equivocan o cuando una propuesta particular llega a su fin. Ellos regresan otra vez y prueban nuevas propuestas, una y otra vez.

• Otro componente importante radica en la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución.

Si uno de los métodos de ataque de un problema no produce la solución satisfactoria, los resolutores exitosos de problemas prueban otro. Ellos normalmente tienen una variedad de métodos de ataque a su disposición y muchas veces transforman el problema original o cambian las condiciones del problema, en espera de lo que pueda ocurrir.

• Finalmente, un buen resolutor de problemas revisa los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

Los buenos resolutores de problemas también muestran gran habilidad para saltar algunas etapas del proceso de solución. Ellos hacen conexiones rápidamente, advierten detalles irrelevantes y, a veces, requieren solamente pocos ejemplos para generalizar, aunque pueden mostrar falta de interés en cuanto a la pulcritud del proceso de su solución.




#### *1.7.3 El resolutor de problemas necesita excelentes problemas*

La evaluación de los aspectos mencionados anteriormente y que constituyen el perfil ideal de los alumnos al egresar de la educación básica, no puede ser realizada usando solamente problemas rutinarios y ejercicios con lápiz y papel, porque se desperdicia así el gran potencial de los niños y de los jóvenes. Es importante diseñar actividades adecuadas, que capturen información de los momentos identificados en este modelo. ¡Es de vital importancia proponer buenos problemas!

## 1.8 ¿Cómo diseñar excelentes problemas?

La resolución de problemas es la habilidad básica en la educación matemática; es la principal razón de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por consiguiente, es fundamental utilizar y diseñar buenos problemas. ¡Éste es el principal reto del profesor!

#### *1.8.1 Características o componentes de los excelentes problemas*

Se pueden encontrar excelentes problemas prácticamente en todos los aspectos de la vida y también en buenos textos de matemáticas. No es necesario que sean problemas verbales.

A continuación se presenta un modelo para diseñar buenos problemas, con fines de enseñanza, aunque también podría ser útil para el diseño de tareas con fines de investigación.

**Características de los buenos problemas**



Deben tomar en cuenta las variables del sujeto

- Que sea interesante al niño (que apele a su actividad).
- Que tomen en cuenta su nivel de desarrollo (en cuanto a la complejidad gramatical).

Deben tomar en cuenta las variables de los problemas

- Que involucren conceptos matemáticos, o habilidades matemáticas, pero no en formas obvias y rutinarias.
- Debe ser posible extenderlos.
- En la medida de lo posible, que se interrelacionen con otras disciplinas.
- Que sean variados, tales como problemas de encontrar, de demostrar, pertinentes, contradictorios, etc.
- Han de proponerse problemas semejantes, variando únicamente las palabras y conceptos clave.

Deben tomar en cuenta las variables de la situación

- Proponer un ambiente permanente en el salón de clases, en donde los estudiantes sean motivados y retados a ver el poder y el valor de las matemáticas, a través de actividades planeadas. Preguntar cuestiones que estimulen a los niños a investigar, preguntar, razonar, graficar, aplicar y disfrutar las matemáticas, con el fin de perseguir el éxito de los niños.
- Que tengan un reto: que sean difíciles pero accesibles.
- Que demanden un plan y una reflexión; es decir, que no se puedan resolver instantáneamente.
- Que permitan un número diferente de métodos estratégicos de solución.
- Que algunos incluyan varias soluciones. Así, una solución completa puede requerir que se encuentren todas las soluciones, esto es, decidir cuántas soluciones existen.

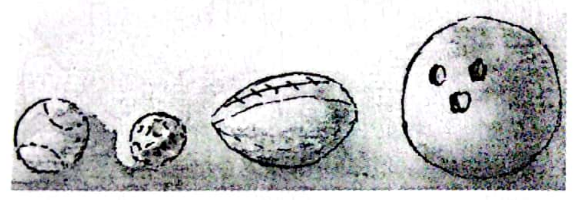
### *1.8.2 Ejemplos que ilustran las características de los excelentes problemas*

Los siguientes ejemplos se derivan del modelo anterior y pretenden ilustrar algunos de los aspectos señaldos, pero bien pueden involucrar uno o más aspectos al mismo tiempo, dependiendo de lo que se quiera enfatizar, con fines de enseñanza.

*A. "Los problemas deben involucrar conceptos matemáticos o habilidades matemáticas"*

Ejemplos:

**Problema 1.** ¿Cuál figura no pertenece a la colección?



En este caso, el concepto implícito es la clasificación de figuras, pero además involucra la habilidad de la memoria, generalizada para niños de preescolar o de primer grado de primaria.

**Problema 2.** Jorge pesa 39 kilogramos, Luisa pesa 48 kilogramos y Julia pesa 42 kilogramos. Dibújalos de acuerdo con el orden de su peso.

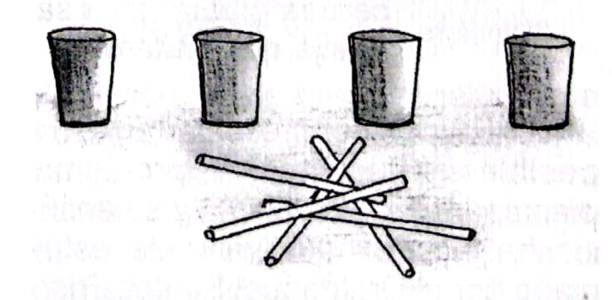
Aquí, el concepto implícito es la relación de orden entre los números y el ordenamiento de los niños del problema, de acuerdo con su peso.

**Problema 3.** El piso de la casa del changuito en el zoológico es de forma cuadrangular, de 2 metros por lado y está cubierto de adoquín. La siguiente es la casa del gorila. El piso también tiene forma cuadrangular, pero sus lados son de 4 metros. ¿Cuántos metros cuadrados más de adoquín se necesitan para cubrir el piso de la casa del gorila?

En este problema están implícitos varios conceptos y su solución involucra ciertas habilidades. Los conceptos son el reconocimiento de las propiedades del cuadrado, el área y el manejo de ciertos hechos matemáticos, así como la fórmula para encontrar el área de un cuadrado y el uso de algoritmos (multiplicar y restar).

*B. "Los problemas deben poder extenderse"*

**Problema 1.** ¿Hay más popotes o más vasos?



¿Como extender el problema una vez resuelto? Algunas extensiones puede ser: "Si quito un vaso y un popote, ¿qué hay más?", etc.

**Problema 2.** Se organiza en un salón una comida para 18 niños. El salón tiene mesas para que puedan comer sentados 4 ó 6 personas. Muestra cómo puede el mesero sentar a los niños para comer.

¿Cómo extender el problema una vez resuelto? Algunas extensiones pueden ser:

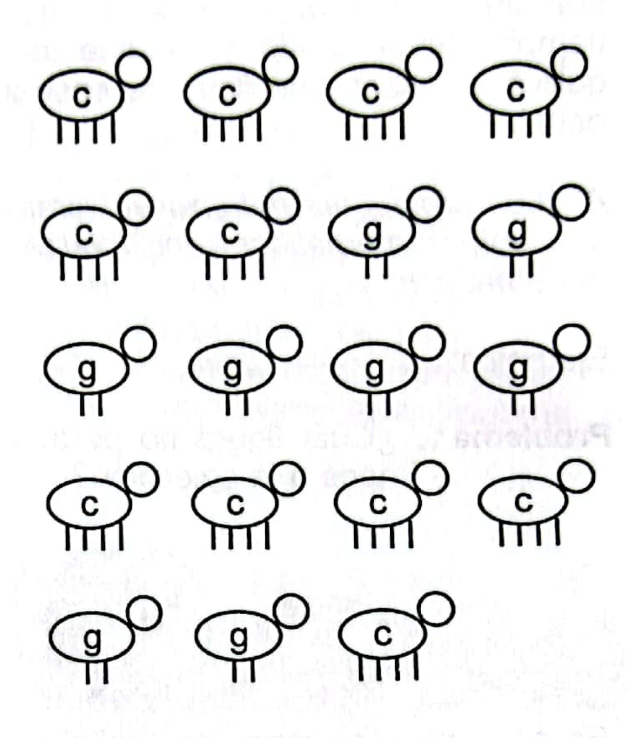
Si se incorporan tres personas más al grupo, ¿cómo podrían ser acomodadas? ¿Qué puede ocurrir si el mesero consigue una mesa para 8 niños? ¿Qué puede ocurrir si la comida sólo es para 21 niños?, etc.

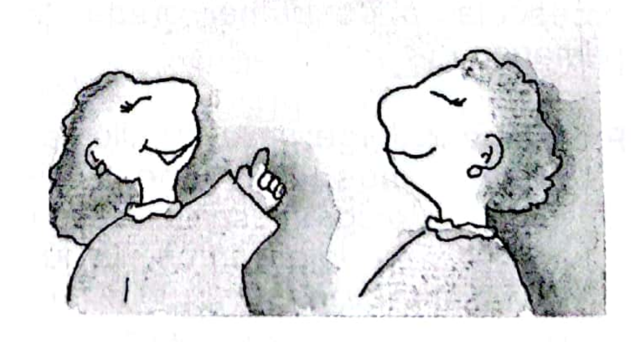
*C. "El problema debe prestarse a una diversidad de métodos de solución"*

**Problema 1.** El fin de semana Pedro y María visitaron una granja que produce gallinas y cerdos. Pedro observó que en total había 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en esa granja que visitaron?

A continuación se presentan algunas posibles soluciones al problema planteado. Este problema y su análisis ha sido exhaustivamente estudiado por el Dr. Manuel Santos Trigo (CINVESTAV, 1993).

***I. El método pictorial*** incluye el uso de figuras, dibujos, o diagramas como medio para representar el problema. El estudiante puede dibujar los animales, o representarlos mediante un diagrama, y usar esto como referencia para aumentar la cantidad o eliminar algunos, de acuerdo con el número de patas.

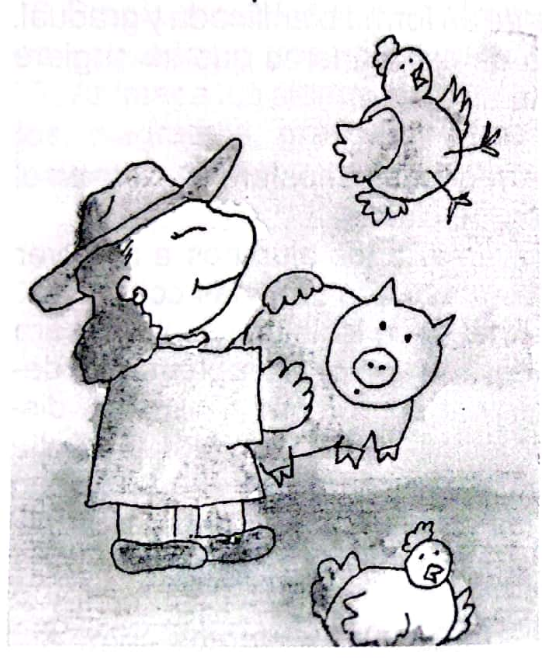


***II. El método de ensayo y error*** puede ser usado originalmente por el estudiante. Además, puede incluir varias direcciones de acuerdo con el tipo de ensayo que se seleccione.

Por ejemplo, el estudiante puede utilizar:

a. *Un método de intercambio,* en el cual fija un número determinado de cerdos o gallinas y los empieza a intercambiar, de acuerdo con el número de patas. Así, el estudiante puede iniciar con 19 cerdos, calcular el número de patas y, a partir del resultado, empezar a disminuir el número de cerdos de uno en uno, compensando cada cerdo con la gallina correspondiente. Si repite este procedimiento llegará a la solución del problema.

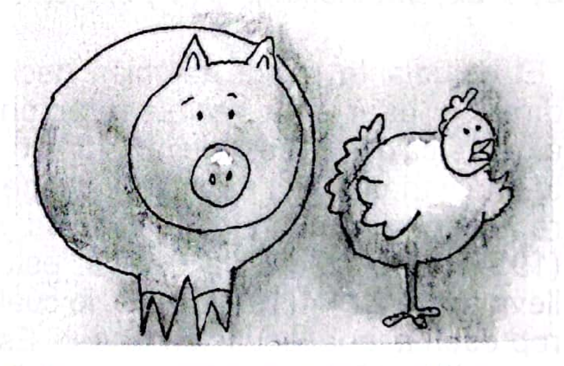


b. *Un método de conteo* puede iniciarse con cualquier número de gallinas y cerdos. Por ejemplo, 10 y 9, respectivamente. Contando el total de patas se tiene que 20 + 36 = 56; se nota que faltan cuatro patas. Entonces la siguiente selección puede ser 9 gallinas y 10 cerdos; esto lleva a 18 + 40 = 58 patas. En este caso faltan 2 patas. Naturalmente la siguiente selección conlleva a considerar 8 gallinas y 11 cerdos lo que produce la solución deseada.

c. *La construcción de una tabla*, que puede ayudar al estudiante a seleccionar los números, sistemáticamente. Por ejemplo, iniciando con los casos extremos (sólo gallinas o cerdos) y tomando en cuenta la información se puede generar una tabla como la siguiente:

| gallinas | cerdos | patas |
|---|---|---|
| 19 | 0 | 38 |
| 0 | 19 | 76 |
| 10 | 9 | 56 |
| 8 | 11 | 60 |

***III.*** *El método de correspondencia* puede también aparecer en la solución del problema. La idea es pensar en una correspondencia entre el número de patas y cabezas. Dos formas similares ilustran este procedimiento:



a. Supongamos que las gallinas se sostienen sólo con una pata y los cerdos sólo con dos patas. Ahora existen la mitad de las patas pisando tierra, es decir 30 patas. En este número la cabeza de una gallina se cuenta solamente una vez, mientras que la cabeza (19) nos resulta el número de cabezas de cerdos. Esto es 30 - 19 = 11 cerdos y 8 gallinas.

b. Otra variante del método de correspondencia es imaginarse que todos los animales se sostienen con dos patas. Entonces habrá 38 patas tocando tierra y (60 - 38) = 22 patas en el aire. Estas 22 patas deben ser patas de cerdo. Como sólo dos patas de cada cerdo están en el aire, entonces hay 11 cerdos.

*IV. El método algebraico* también puede ayudar a resolver el problema. Una forma puede ser representando la información dada en un sistema de ecuaciones:

número de gallinas = $x$
número de cerdos = $y$
número de cabezas
$x + y = 19$ ——————— (1)
número de patas
$2x + 4y = 60$ ——————— (2)
Multiplicando (1) por 2 y restando (2) se obtiene:
$2y = 22$; entonces: $y = 11$ y $x = 8$.

El estudiante puede también decidirse a usar una representación algebraica donde se incluya solamente una variable. Por ejemplo, $x$ puede representar el número de gallinas y $(19 - x)$ el número de cerdos; esto lleva a que $2x + 4(19 - x) = 60$, lo cual representa una ecuación lineal. Es decir, $2x + 76 - 4x = 60$, donde $x = 8$.

Éstos son algunos ejemplos de cómo diseñar excelentes ejemplos; pero quizá el desafío mayor para el profesor o el pedagogo, que cotidianamente trabajan con sus alumnos en el salón de clases es: ¿cómo enseñar la resolución de problemas? y ¿qué estrategias didácticas utilizar?

## 1.9 ¿Cómo enseñar la resolución de problemas?

### *1.9.1 La pedagogía de la resolución de problemas*

Si se considera la resolución de problemas como objeto específico de la enseñanza, tendrá sentido plantearse la pregunta de cómo enseñar la resolución de problemas. Cuando la actividad del maestro está dirigida a propiciar que los alumnos asimilen la solución de problemas, deberá realizarse en forma planificada y gradual. Una de las maneras que se sugiere es la siguiente:

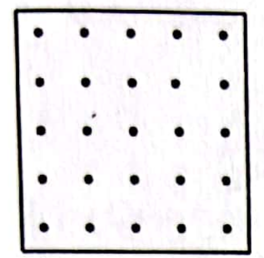
1. Crear una atmósfera de éxito en el salón de clases.
2. Animar a los alumnos a resolver problemas cada vez más complejos.
3. Enseñar a los alumnos la manera de leer y entender el problema, y a desentrañar su anatomía; esto es, discutir los diferentes sentidos o significados de las palabras que aparecen en los problemas de los datos implícitos. Por ejemplo:

| | |
|---|---|
| •más | •tantos como |
| •menos | •peso |
| •arriba | •diferencia |
| •abajo | •perímetro |

4. Involucrar a los alumnos en el problema; para esto hay que diseñar o seleccionar problemas que permitan a los alumnos ser actores o experimentar con materiales manipulables. Por ejemplo:

- ¿Qué tan lejos pueden caminar en un minuto?

- ¿Cuántos alumnos de tu salón tienen la letra R en su primer nombre?
- En tu geoplano, ¿cuántas figuras puedes construir que tengan cuadritos en su interior?

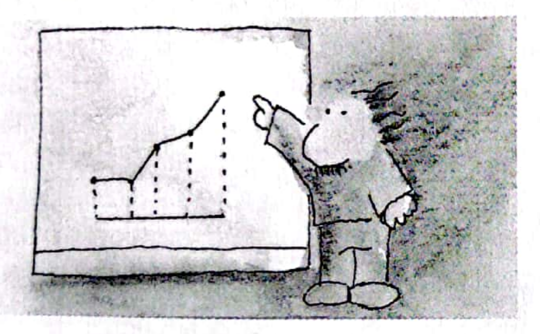




5. Solicitar a los alumnos que creen sus propios problemas.

6. Propiciar que los alumnos trabajen en pequeños grupos o en parejas.

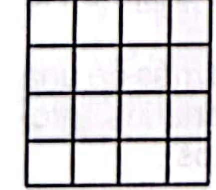
7. Animar a los alumnos a usar dibujos, diagramas, gráficas y otras estrategias, para resolver el problema.



8. Cuando los alumnos estén bloqueados mentalmente y empiecen a abandonar la tarea, sugerirles otras opciones, pero sin dar nunca la respuesta directamente.

Por ejemplo, dado el siguiente problema, los estudiantes lo trabajarán en pequeños grupos y en diferentes formas.

Cada grupo presentará su solución.



¿Cuántos cuadrados hay en esta figura?



En caso de que los estudiantes se bloqueen, puede sugerirse lo siguiente: ¿Cuántos cuadrados hay en esta figura ⊞ y cuántos en esta otra ▦ ?

9. Aumentar la creatividad de los alumnos y hacer preguntas constructivas.

Frecuentemente, los maestros, por ansiedad, quieren darle las respuestas a los alumnos diciendo: "El resultado debe ser cin...".



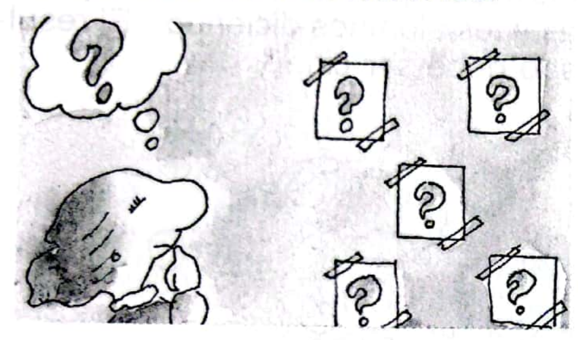

El maestro, en la medida que se involucra en el proceso de enseñanza de la resolución de problemas, debe hacer preguntas o sugerencias: "Cuenta el número de...". "Encuentra todos los...". "Si... entonces...".



10. Enfatizar la creatividad y la imaginación y el cálculo mental de los alumnos. Por ejemplo:

"Traten de resolver este problema:

- Estoy pensando en dos números de 2 dígitos.
- Ellos tienen los mismos dígitos pero al revés.
- La diferencia entre estos números es 54 y la suma de los dígitos de cada número es 10.
- Encuentren los dos números."



11. Enfatizar la estimación de resultados. Por ejemplo:

- ¿Cuántos pasos medirá de largo este salón?
- Aproximadamente ¿cuál será la suma de $595.50 + $398.25?

12. Animar a los alumnos a usar la calculadora como medio para descubrir relaciones, y no solamente para verificar resultados:



- ¿Cuál es el número más grande que se puede formar al oprimir cada una de las teclas siguientes, solamente una vez?



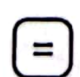




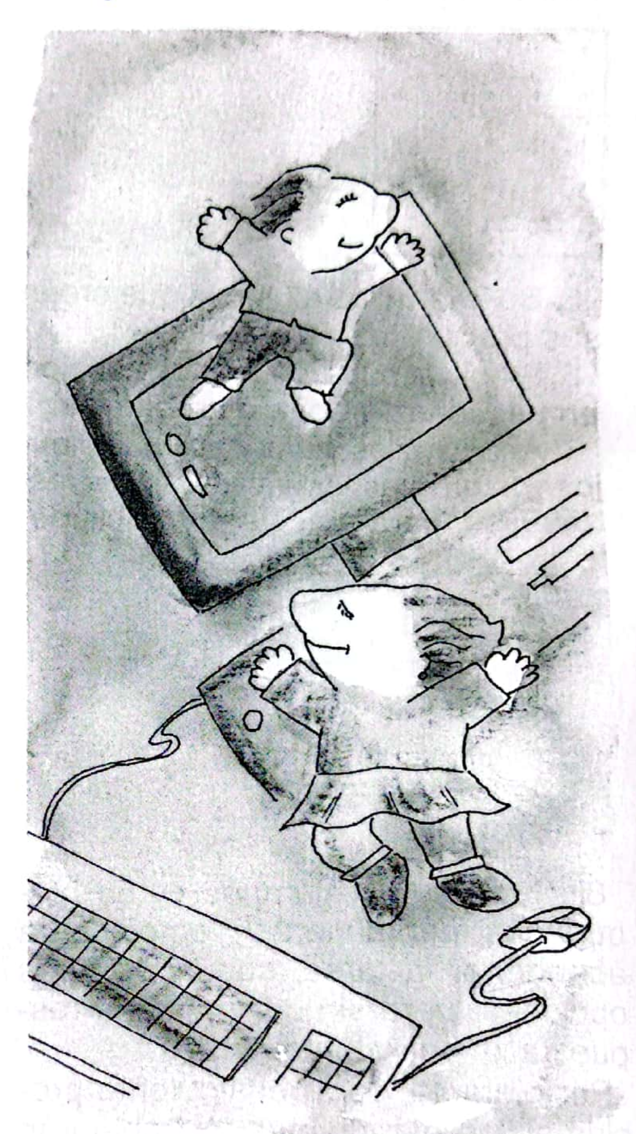



5



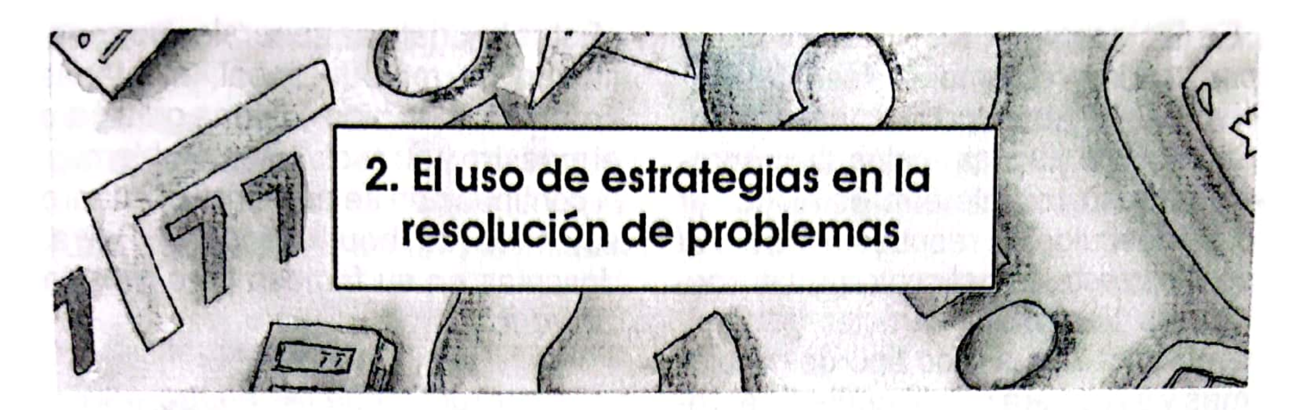

13. Aprovechar el uso de la computadora para descubrir y hacer matemáticas, por ejemplo, mediante el programa LOGO "Geometría de la tortuga".



14. Enfatizar el uso de diagramas de flujo en el proceso de resolución de problemas.

15. Usar estrategias de juego en la clase.

16. Incluir problemas de más de una etapa (problemas no rutinarios, problemas sólo para expertos).

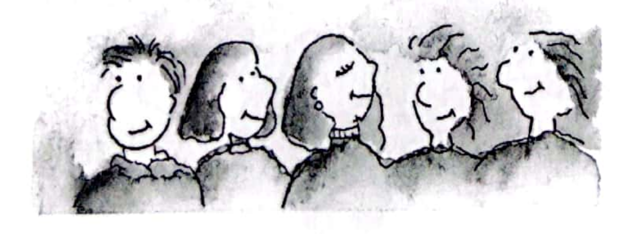


# 2. El uso de estrategias en la resolución de problemas

## 2.1 ¿Qué son las heurísticas?

Se ha dicho anteriormente que la resolución de problemas es un proceso que inicia cuando el niño se confronta con el problema y finaliza cuando ha obtenido una respuesta y la revisa de acuerdo con las condiciones dadas del problema.

Los niños deberían tomar conciencia de este proceso si continuamente están inmersos en él, ya sea de manera individual, con un compañero o en pequeños grupos, ya que consiste en una serie de tareas y procesos de pensamiento, que, en la escuela, normalmente se vinculan muy débilmente, y que sirven para conformar lo que se llama un conjunto de *heurísticas*. Hay varios tipos de sugerencias y cuestiones acerca de lo que una persona debería seguir y hacer por sí misma, para resolver su problema. Aquí se adoptará un modelo que es susceptible de aplicarse en el aula, pero no a manera de algoritmos–recetario.



Para entender la naturaleza de las heurísticas comparémoslas con los algoritmos. Estos últimos constituyen una serie de pasos que permiten llegar a un resultado, como en el caso de los programas para computadoras.

No todos los algoritmos son de pocos pasos. Por ejemplo, el algoritmo de la división, puede ser de muchos pasos:



```
       10.93
25 |273.45
     23.4
      0 95
        20
```

En la calculadora, es mucho más fácil descubrir la esencia del algoritmo de la división

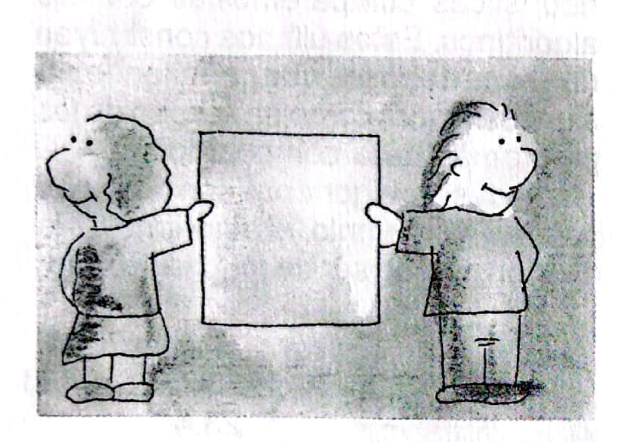
273.45 ÷ 25

[2] [7] [3] [•] [4] [5]

[÷] [2] [5] [=]

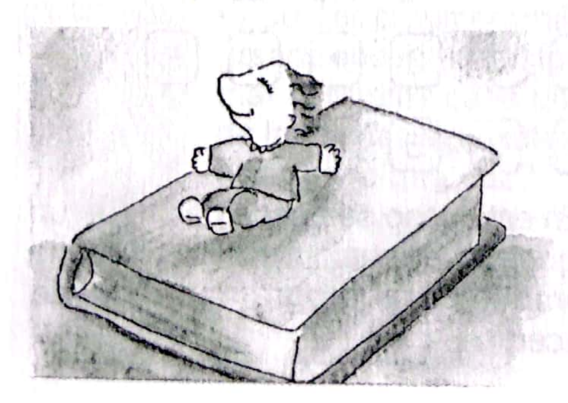
En este caso se puede decir que un algoritmo es cualquier cosa que una computadora programada pueda hacer.

En los programas computarizados, para cada problema, o clase de problemas, hay un algoritmo específico. Si uno elige y aplica el algoritmo apropiado, y no comete errores al teclear o de descuido, la respuesta obtenida será correcta. Por el contrario, las heurísticas tienen un carácter general, son aplicables a todo tipo de problemas y sirve para que la gente se aproxime, entienda y obtenga las respuestas a los problemas que enfrenta.



### *2.1.1 Las heurísticas de Polya*

No hay un tipo especial de heurísticas para la resolución de problemas que sea considerado como las mejores, aunque es justo reconocer que las más usadas, son las de Polya, famoso matemático de la Universidad de Stanford que se dedicó a la resolución de problemas.



Estas heurísticas generales no constituyen un método lineal, ni etapas cerradas; más bien son una guía para el maestro y el resolutor de problemas. A continuación se presenta el cuadro sinóptico de heurísticas de Polya, descritas en su famoso libro *How to Solve it*.

*Proceso de las cuatro etapas de Polya*

*Etapa I  Entender el problema*

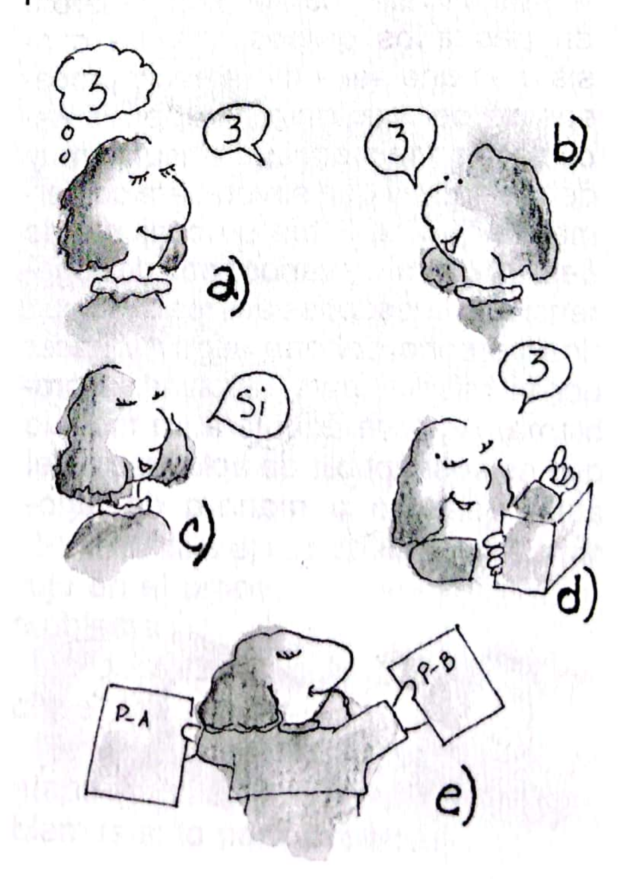
a. ¿Entiendes todo lo que se dice?

b. ¿Puedes explicar el problema con tus propias palabras?

c. ¿Sabes lo que se pide?

d. ¿Hay suficiente información?

e. ¿Este problema es similar a otros problemas que has resuelto?

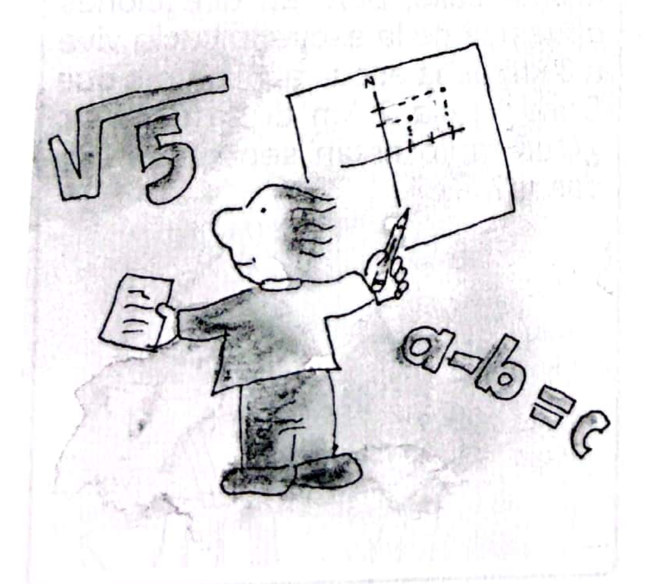


*Etapa II   Concebir un plan*

¿Puede ser usada una de las siguientes estrategias?

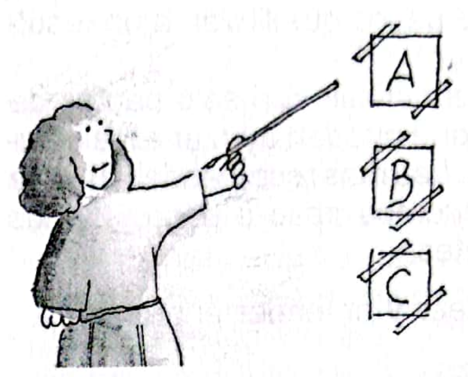
(Una estrategia es un fin y un medio astuto)

1. Adivinar y probar.
2. Usar una variable.
3. Observar un patrón.
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema sencillo.
6. Dibujar un diagrama.
7. Usar un razonamiento directo.
8. Usar un razonamiento indirecto.
9. Usar las propiedades numéricas.
10. Resolver un problema equivalente.
11. Trabajar hacia atrás.
12. Usar casos especiales.
13. Resolver una ecuación.
14. Resolver una fórmula.
15. Hacer una simulación.
16. Usar un modelo.
17. Usar el análisis dimensional.
18. Identificar.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.




*Etapa III   Llevar a cabo el plan*

a. Al ejecutar el plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
b. ¿Puede ver claramente el paso correcto?
c. ¿Puede domostrar los pasos?




*Etapa IV   Visión retrospectiva*

a. ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
b. ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de gobe?
c. ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

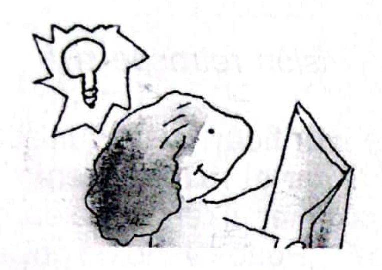
Los investigadores y maestros saben de sobra que hay una diferencia entre comprender el proceso en el plano intelectual (teoría y práctica), y tener la habilidad para aplicar el proceso. De la misma manera, en este caso se debería hacer mucho más que tener a la mano las heurísticas para los estudiantes; la instrucción debería concentrarse sobre cada etapa de los procesos que el resolutor hace a través de los problemas; es decir, debería centrarse en el *proceso* y no en la *respuesta*. En este sentido, es conveniente seleccionar cuáles procesos de la resolución de problemas se deben enfatizar para los estudiantes de primaria y secundaria.

## 2.2 ¿Cuáles heurísticas usar?

Las heurísticas como las de Polya no deben confundirse con los algoritmos. Los algoritmos son una serie de pasos que llevan irremediablemente a la solución del problema. En computación, por ejemplo, se siguen una serie de pasos que llevan a un resultado.

Las heurísticas son sólo pautas de acción que pueden ayudar a los estudiantes. Las más recomendables, que describiremos paso a paso, son las siguientes:

2.2.1 Leer y entender el problema.



2.2.2 Explorar.
2.2.3 Seleccionar una estrategia.



2.2.4 Resolver.
2.2.5 Retroalimentarse y extender el problema.




### *2.2.1 Leer y entender el problema*

Al leer, median muchas cosas más que palabras. Un problema tiene una anatomía; generalmente se le considera de 4 partes: una composición lingüística estructural, una(s) pregunta(s), algunos hechos y algunos distractores. Durante el proceso de resolución de problemas, el maestro y el estudiante deberían identificar estos aspectos:

a. Describir la composición y visualizar la acción.
b. Reconstruir el problema con las propias palabras del niño.
c. ¿Qué se pregunta?
d. ¿Qué información se da?
e. ¿Cuáles son los hechos clave?
c. ¿Hay información extra?

Ilustremos esta serie de pasos a través de algunos problemas para niños de diferentes grados, que le sirvan de modelo al maestro.

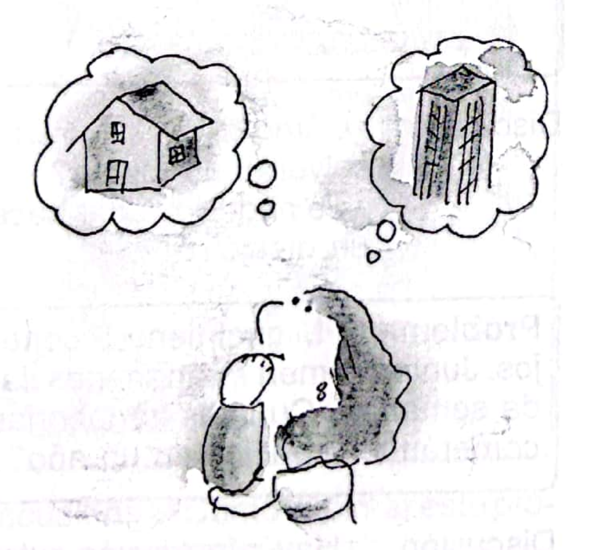
**Problema 1**. Lucía y Dora dejan la escuela a las 2:00 p.m. y se dirigen a sus casas. Sus casas están en la misma calle, pero en direcciones opuestas de la escuela. Lucía vive a 3 km de la escuela, mientras que Dora vive a 2 km de la escuela. ¿Qué tanto están separadas sus casas?



Discusión: ¿Puedes visualizar la acción?
¿Puedes describir qué está sucediendo?
¿Qué papel desempeña 2:00 p.m.?
¿Cuál o cuáles son las palabras clave?

**Problema 2.** Lucía y Dora dejan la escuela a las 2:00 p.m. y se dirigen a sus casas. Sus casas están en la misma calle, y en la misma dirección con respecto a la escuela. Lucía vive a 3 km de la escuela, mientras que Dora vive a 2 km de la escuela. ¿Qué tanto están separadas sus casas?

Discusión: ¿Puedes visualizar la acción?
¿Puedes describir qué está sucediendo?
¿Qué hace diferente a este problema del anterior?
¿Qué palabra clave hace la diferencia?



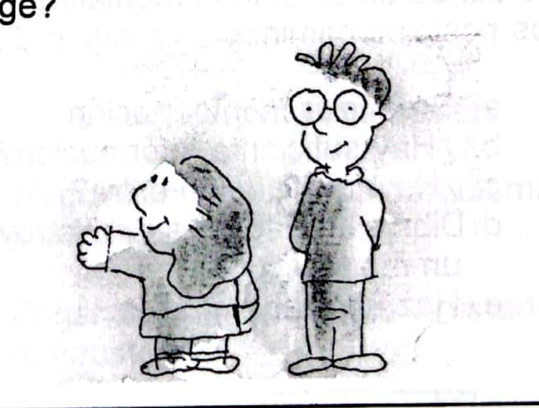
**Problema 3.** Encuentra la diferencia en el número de manzanas en un saco de tres kilogramos, que contiene 27 manzanas y una canasta que contiene 2 docenas.

Discusión: ¿Cuál es la información extra?
¿Cuál es la pregunta?
¿Cuál o cuáles son las palabras clave?

**Problema 4.** José pesa 60 kilogramos, su hermana Leticia pesa 75 kilogramos. Enrique pesa 5 kilogramos más que Nancy. ¿Cuál es el peso promedio de los tres?

Discusión: ¿Cuáles son las palabras importantes?
¿Hay información suficiente para resolver el problema?
¿Qué se pregunta?

**Problema 5.** María tiene 12 años. Su hermano Jorge tiene 5 años más que ella. ¿Qué edad tiene Jorge?



Maestros: ¿Qué preguntas hacer para enfatizar estas heurísticas de leer y entender el problema?

En esta fase es importante involucrar a los alumnos en el significado de todas las palabras y símbolos implícitos en el problema.

Si el alumno no conoce el significado de ciertas palabras, propicie que recurra al diccionario.

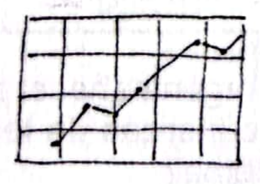
Tome en cuenta que algunos términos matemáticos tienen más de un significado.

Por ejemplo, la palabra *divisor* puede significar "el número dividido entre...". (En 12 ÷ 3 = 4 el divisor es 3.) Pero también significa "un número que divide exactamente a otro" (7 es divisor de 21, porque 3 x 7 = 21). En este caso la palabra *divisor* tiene el mismo significado que *factor*.

### *2.2.2 Explorar*

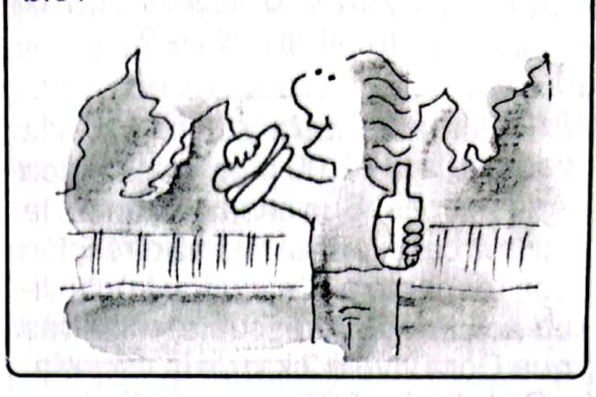
Explorar es una actividad que el más experimentado resolutor de problemas hace sin tener conciencia de ello. Es el análisis y síntesis de la información contenida en el programa, lo cual ha sido revelado durante la etapa anterior, *leer y entender el problema*. Es en esta etapa del proceso donde se examinan mentalmente los posibles caminos:

a. Organizar la información.
b. ¿Hay suficiente información?
c. ¿Hay información extra?
d. Dibuja un diagrama o construye un modelo.
e. Haz una tabla gráfica.





**Problema 1.** En el parque, una rebanada de *pizza* cuesta $3.50; un refresco, $1.50, y un *hot dog* cuesta $4.50. Arturo compró un *hot dog* y un refresco. ¿Cuánto cambio recibió?



Discusión: ¿Hay suficiente información?

**Problema 2.** Un tronco de árbol va a ser cortado en cinco piezas iguales. ¿Cuántos cortes hay que hacerle?



Discusión: ¿Cómo se te ocurre resolver el problema? ¿Te podría ayudar hacer un dibujo?

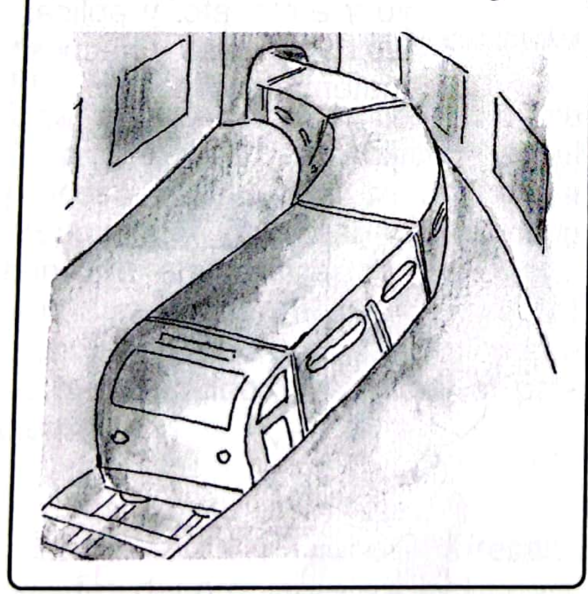
**Problema 3.** Miguel tiene 8 conejos. Juntos comen 7 zanahorias cada semana. ¿Cuántas zanahorias comerán los conejos en un año?

Discusión: ¿Hay información extra? ¿Cuál?

**Problema 4.** Daniel está regalando sus revistas de colección a sus amigos. Él tiene 400 revistas; regala la mitad a Miriam. A Susana le regala la mitad de lo que le quedó. A Roberto le regala la mitad de lo que le ha quedado ahora y, finalmente, le regala a Pedro la mitad de lo que le quedó anteriormente. ¿Cuántas revistas dio Daniel a cada uno de sus amigos?

Discusión: ¿Cómo explorar este problema?
¿Qué preguntas hacer?

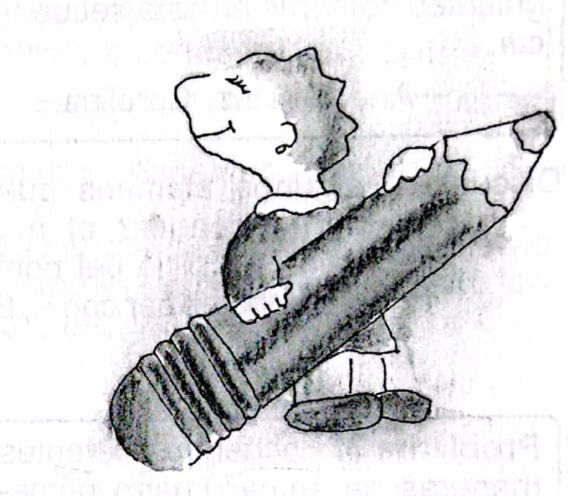
**Problema 5.** Tacuba, Hidalgo, Pino Suárez y Taxqueña son estaciones de la línea 2 del metro. La distancia de Hidalgo a Pino Suárez es de 5 km. La de Hidalgo a Taxqueña es de 20 km y la de Tacuba a Taxqueña es de 55 km. ¿Cuál es la distancia de Tacuba a Hidalgo?



Discusión: ¿Cómo explorar este problema?
¿Qué preguntas hacer?

***2.2.3 Seleccionar una estrategia***

Como resultado de la etapa de exploración, el resolutor de problemas ahora selecciona el sendero que considera más apropiado. Aquí mostraremos las 8 estrategias más usadas, pero es posible encontrar otras (Polya menciona 23). Ninguna estrategia es inferior a otra. En esta etapa es importante animar a los alumnos a usar dibujos, diagramas, gráficas y otras heurísticas, para resolver los problemas.



a. Reconocimento del modelo.

b. Trabajando hacia atrás.

c. Ensayo y error.

d. Simulación o experimentación.

e. Reducción / resolver un problema más simple.

f. Organizar un enlistado / listado exhaustivo.

g. Deducción lógica.

h. Divide en partes.

**Problema 1.** Encuentra los siguientes términos de esta secuencia:

2, 4, 6, ...

Discusión: ¿Cuál es el modelo? Algunos alumnos pueden encontrar el modelo $2n$.

**Problema 2.** Encuentra los siguientes nombres en esta secuencia:

Ana, Beatriz, Carolina...

Discusión: Algunos alumnos pueden reconocer el modelo: "El inicio del nombre debe de ser con A, B, C...".

**Problema 3.** Encuentra diferentes maneras de sumar cuatro números enteros y obtener 10 como suma.

Discusión: Algunos alumnos pueden utilizar ensayo y error o experimentación, y de esta manera llegar a la solución.

**Problema 4.** ¿Cuántos tercios hay en tres cuartos?

Discusión: Algunos alumnos pueden utilizar modelos más simples, como por ejemplo utilizar cuántos 2 hay en 8.

**Problema 5.** María, Teresa, José y Enrique, fueron a pescar. María pescó 16 peces; Teresa, 13; José, 17, y Enrique, 14. ¿Cuántos peces más pescaron José y Enrique que María y Teresa?

Discusión: Una vez que los alumnos han logrado entender el problema y tienen un plan de solución, sólo bastaría utilizar una tabla y sus habilidades para sumar y restar.

**Problema 6.** En un parque de diversiones, 18 personas van a dar un paseo en carretas. Un tipo de carreta tiene 4 asientos y el otro tipo, 6. ¿Cómo pueden ser acomodadas las 18 personas en las carretas?

Discusión: Utilizar una tabla, ensayo y error, etc. y aplicar las habilidades y hechos matemáticos.



### *2.2.4 Resolver*

Una vez que el problema ha sido comprendido y la estrategia ha sido seleccionada, el estudiante debe desarrollar las matemáticas necesarias para llegar a la respuesta. En la mayoría de los casos de la escuela básica, estas matemáticas consisten en habilidades básicas de cómputo con números enteros, decimales y fracciones, algunas propiedades métricas de geometría y algo de lógica elemental.

a. Usar habilidades computacionales.
b. Usar habilidades geométricas.
c. Usar la lógica elemental.

Es en esta parte del proceso de resolución de problemas donde se pueden enfatizar los algoritmos de las operaciones. Se puede requerir el uso de ejercicios para su dominio.

### *2.2.5 Retroalimentarse y extender el problema*

Una "respuesta" no es precisamente "una solución". La solución es el proceso con el cual se obtiene la respuesta. Esta etapa del proceso consiste en verificar la respuesta, verificar las operaciones, recordar mentalmente los procedimientos que se han seguido y extender el problema.

a. Verifica tu respuesta.
b. Observa variaciones interesantes del problema original.
c. Pregunta: "¿Qué pasa si...?".
d. Discute la solución.

## 2.3 Ejemplos del uso de estrategias

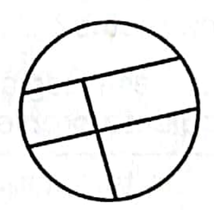
### *2.3.1 Hacer un dibujo*

Muchos problemas matemáticos involucran situaciones físicas. En estas situaciones, hacer un dibujo puede ayudar a entender mejor el problema para que se pueda formular el plan para resolverlo.

**Problema 1.** ¿Puedes cortar un pastel en 9 piezas utilizando solamente 4 cortes rectos?

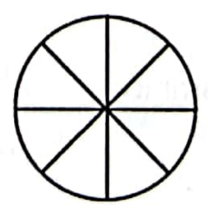
*Etapa I: Entender el problema*

¿Las piezas tienen que ir del mismo tamaño? ¿Deben tener la misma forma?, etc.



*Etapa II: Concebir un plan*

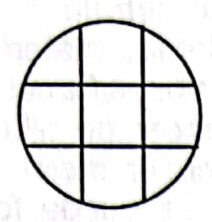
Normalmente se empieza con un dibujo que muestre el "pastel" y se hacen los "cortes" como se ilustra a continuación:



Procediendo así, obtenemos solamente 8 piezas. Probar con otros cortes...

*Etapa III: Ejecutar el plan*

Se prueban otros cortes utilizando dibujos, hasta llegar a la solución.



*Etapa IV: Visión retrospectiva*

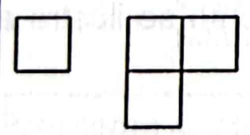
¿Pensaste en hacer los cortes iguales?
¿Pusiste los cortes desiguales?
¿Hiciste el dibujo del pastel en forma circular?
¿En forma cuadrada?

Extensión:
¿Cuántas piezas puedes obtener con cinco cortes rectos?
¿Con *n* cortes rectos?

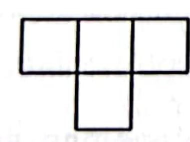
Utilizando esta estrategia, trate de resolver el siguiente problema:

**Problema 2.** Un tetraminó es una figura hecha de cuatro cuadrados, donde los cuadrados pueden ser unidos a lo largo de un lado o del otro.

no es un tetraminó



si es un tetraminó

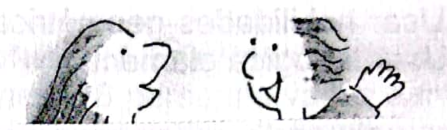


¿Cuántos tetraminós diferentes se pueden hacer?

**2.3.2. "Observando un patrón"**

Cuando usamos la estrategia "Observando un patrón", usualmente observamos detenidamente el modelo para ver si "emerge" el patrón que sugiera la solución del problema. Por ejemplo: considérese la suma de los números consecutivos impares:

$1 = 1 = 1^2$ Cuadrados
$1 + 3 = 4 = 2^2$ perfectos
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
etc.

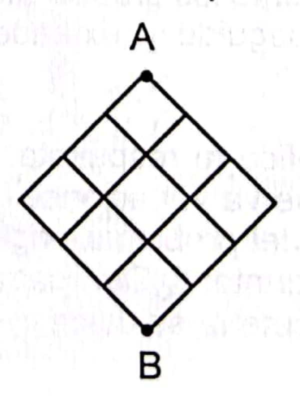


Basados en este patrón, generado por estos cinco ejemplos, se podría esperar que para cada suma siempre se dé un cuadrado perfecto.

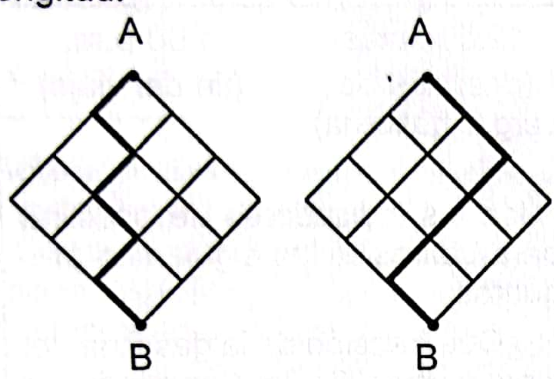
Ilustremos esta estrategia con un ejemplo:

**Problema 3.** ¿Cuántos diferentes caminos hay, hacia abajo, para llegar de A a B siguiendo la cuadrícula?

*Etapa I: Entender el problema*

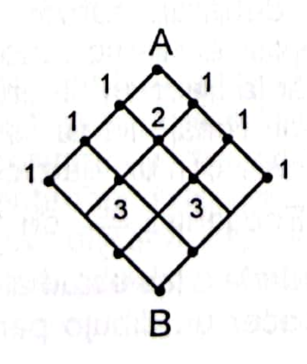


¿Qué entendemos por *diferentes caminos* y *hacia abajo*? La figura siguiente ilustra dos caminos. Observe que cada camino tendrá 6 unidades de largo, pero el camino es diferente, aunque puede ocurrir que solamente una parte sea diferente. Es decir, cada camino deberá tener la misma longitud.



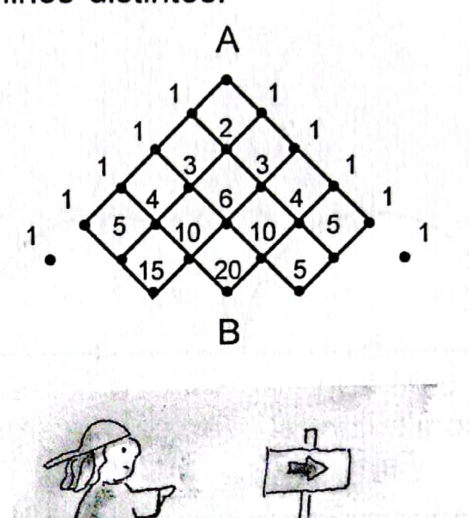

*Etapa II: Concebir un plan*

Mirando cada punto de intersección en la *cuadrícula*, y viendo que se pueden obtener diferentes caminos, hay que elegir solamente uno para alcanzar cada punto del borde; hay dos caminos para alcanzar el punto 2 en la fila de puntos rotulados como 1, 2, 1. Hay tres caminos en el punto 3 en la siguiente fila; y así sucesivamente, de cada punto; eso quizá ayudará a ver el patrón.




*Etapa III: Ejecutar el plan*

Para ver cuántos caminos hay del punto A al punto B se necesita aumentar el modelo vislumbrado en el paso anterior. Para ello, observe la figura siguiente; por ejemplo, para 4 + 6 = 10 y 20 + 15 = 35. A este patrón se le llama Triángulo de Pascal. Una porción de este patrón nos da la respuesta del problema: hay 20 caminos distintos.




*Etapa IV: Visión retrospectiva*

¿Cómo se podría resolver un problema similar involucrando una cuadrícula de 4 × 4? ¿Cómo hacerlo con una cuadrícula de 10 × 10? ¿Cómo hacerlo con una cuadrícula rectangular?

Utilizando esta estrategia, trate de resolver este problema:

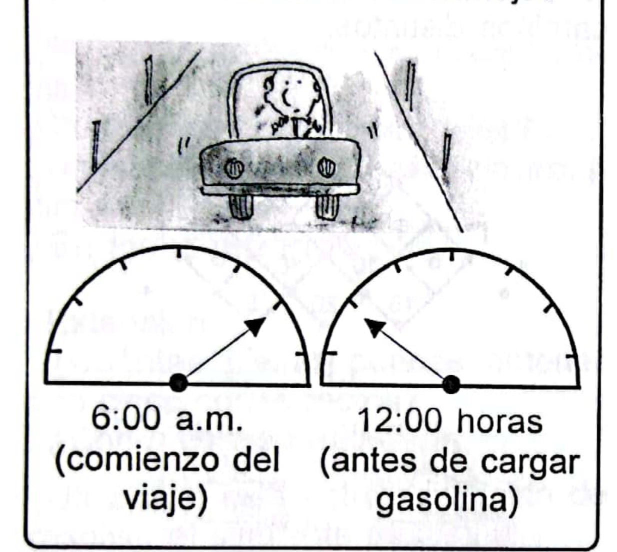
**Problema 4.** ¿Cuáles números enteros del 1 al 50 tienen factores impares?

Por ejemplo, el número 15 tiene a 1, 3, 5 y 15 como factores. Por lo tanto, tiene 4 factores.

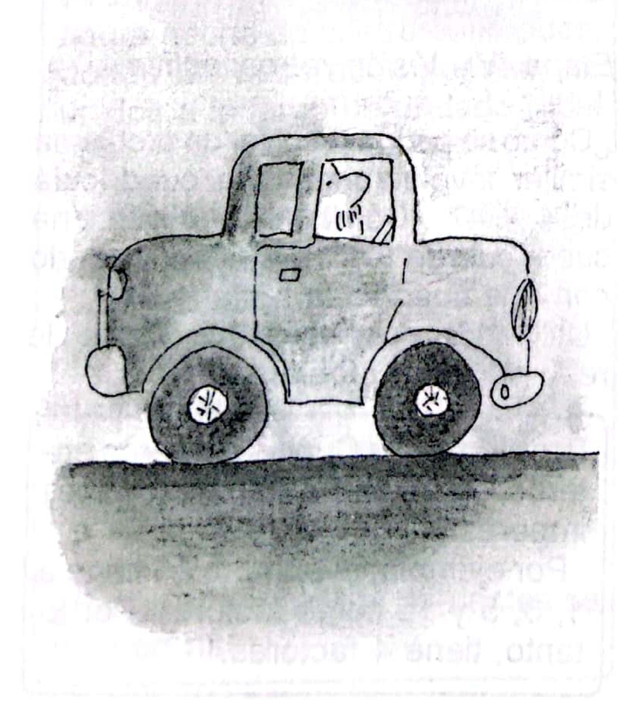
### *2.3.3 Hacer un dibujo*

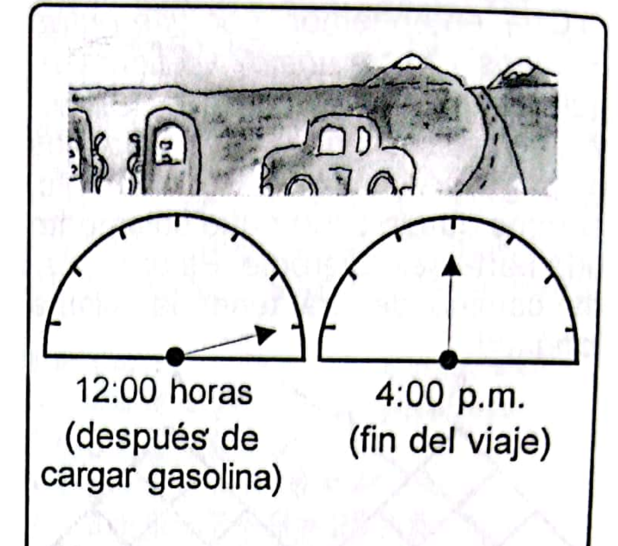
**Problema 5.** *El indicador de gasolina.*

El tanque de gasolina del automóvil del Sr. Macías puede contener 48 litros. Los dibujos ilustran lo que marca el indicador de gasolina en distintos momentos, durante un viaje. ¿Cuántos litros de gasolina usó el Sr. Macías en este viaje?



6:00 a.m. (comienzo del viaje) — 12:00 horas (antes de cargar gasolina)





12:00 horas (después de cargar gasolina) — 4:00 p.m. (fin del viaje)

Usa los indicadores de gasolina para contestar las siguientes preguntas

1. ¿Qué fracción de la gasolina del tanque usó el Sr. Macías desde las 6:00 a.m. hasta las 12:00 horas? ________________

2. ¿Qué fracción de la gasolina del tanque usó el Sr. Macías desde las 12:00 horas, hasta las 4:00 p.m.? ________________

3. ¿Qué fracción de la gasolina del tanque usó el Sr. Macías en todo el viaje? ________________

4. ¿Cuántos litros de gasolina usó el Sr. Macías? ________________

Para resolver este problema, los estudiantes deberán sumar y restar fracciones con el mismo denominador y encontrar la fracción de un número entero. Por consiguiente, se podría revisar la idea con un ejercicio semejante a: "Encuentra $\frac{2}{3}$ de 12". Hay que recordarle a los estudiantes que pueden hacer un dibujo para repre-

sentar $\frac{2}{3}$ de 12. Por ejemplo, el siguiente:

x x | x
x x | x
x x | x
x x | x

Aclarar a los alumnos cómo se lee el indicador de gasolina.

¿Dónde marcará la aguja cuando el tanque esté lleno? ¿Dónde marcará la aguja cuando el tanque esté a la mitad? ¿En cuántas partes está dividido el indicador de gasolina?

Para la pregunta 1 se puede auxiliar a los alumnos con estas preguntas:

¿Qué fracción de la gasolina del tanque marca el indicador a las 6:00 a.m.? ¿Qué fracción de la gasolina marca a las 12:00 horas? ¿Qué fracción de gasolina del tanque se usó durante este tiempo?

Probablemente los estudiantes encuentren las respuestas a las cuestiones anteriores, haciendo operaciones con las fracciones:

$$\frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$$

O bien, contando los octavos en el indicador.

Similar procedimiento podrán seguir los estudiantes para la pregunta 2.

Para la pregunta 3, los estudiantes deberán entender primero que, para encontrar el total expresado en fracción de la gasolina usada, basta sumar:

$$\frac{4}{8} + \frac{3}{8}$$

En el caso 4 es conveniente que se pregunte a los estudiantes: ¿Con cuántos litros de gasolina se llena el tanque del auto del Sr. Macías? Luego se puede sugerir que hagan un *dibujo* para encontrar $\frac{7}{8}$ de 48.

El procedimiento que probablemente seguirán los estudiantes será dibujar X, en 8 grupos de seis X, y luego dibujar una curva cerrada alrededor de 7 de esos grupos. Finalmente bastará contar las X que quedaron encerradas.

X X X X X X X X | X
X X X X X X X X | X
X X X X X X X X | X
X X X X X X X X | X
X X X X X X X X | X
X X X X X X X X | X

Para extender este problema, se puede decir a los estudiantes que el Sr. Macías recorre 10 km por cada litro de gasolina. Pregunte entonces: ¿Cuántos km ha recorrido en todo el viaje?

Anime a los estudiantes a que inventen problemas similares. Por ejemplo, un estudiante propuso el siguiente:

A las 8:00 a.m. había $\frac{7}{8}$ de gasolina en el tanque del carro de la Sra. Martínez. Entre las 8:00 y las 21:00 horas ella usó $\frac{5}{8}$ del tanque. ¿Qué marcará la aguja del indicador de gasolina a las 21:00 h?

### 2.3.4 *Hacer un diagrama; probar y verificar; hacer una tabla*

**Problema 6.** *El carpintero.*

El Sr. García es un carpintero. Hace solamente bancos de 3 patas y mesas de 4 patas. En una jornada de trabajo había usado 31 patas.

¿Cuántos bancas y cuántas mesas hizo el Sr. García?

Piensa en una estrategia que puedas usar y que pueda ayudarte a resolver este problema. Luego contesta las preguntas siguientes:

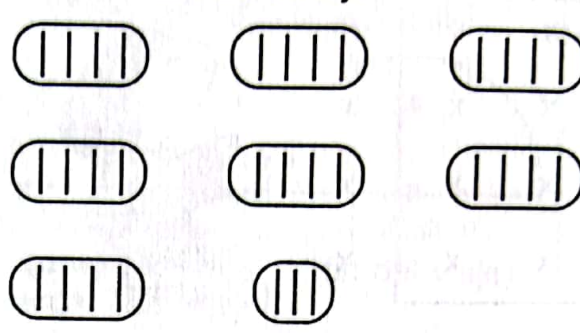
1. ¿Podría el Sr. García haber hecho exactamente 4 mesas? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Podría el Sr. García haber hecho exactamente 1 mesa? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Tiene el problema más de una solución?

Para resolver este problema los estudiantes pueden usar una variedad de estrategias para encontrar el número de mesas y bancos que se pueden hacer, dado el número de patas.

Aclare a sus alumnos que el Sr. García ha usado las 31 patas.



Algunos estudiantes podrán hacer *diagramas* para mostrar todas las posibilidades. Por ejemplo, un estudiante hizo este dibujo.



7 mesas y 1 banco

Otros estudiantes podrán usar la estrategia *Probar y verificar*. Por ejemplo, un estudiante decidió probar con 3 mesas. "Tres mesas requieren 12 patas. Por lo tanto, me quedan 19 patas para los bancos. Pero con 19 patas sólo puedo hacer 6 bancos y me sobra 1 pata. ¡No me sirve! Probaré ahora con 4 mesas. Cuatro mesas requieren 16 patas. Me quedan 15 patas, justo las que necesito para 5 bancos. ¡Muy bien! ¡Lo encontré! El Sr. García puede hacer 4 mesas y 5 bancos."



Otros estudiantes podrían hacer una tabla usando el número de patas para diferente cantidad de mesas y bancos. Luego pueden observar en su tabla algunas combinaciones del número de patas que sumen 31.

| Número de mesas | Número de patas | Número de bancos | Número de patas |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 8 | 2 | 6 |
| 3 | 12 | 3 | 9 |
| 4 | (16) | 4 | 12 |
| 5 | 20 | 5 | (15) |
| 6 | 24 | 6 | 18 |
| 7 | 28 | 7 | 21 |

Los círculos muestran una posible solución:

4 mesas y 5 bancos

Para entender el problema se puede decir a los estudiantes que consideren las posibilidades con 77 patas.




***2.3.5 Hacer un modelo físico; enlistar todas las posibilidades; hacer una tabla***

**Problema 7.** *Medir con pulgadas.*

Laura quiere medir 28 pulgadas. Sin embargo, no tiene más que una regla de 8 pulgadas y otra de 3 pulgadas. ¿Qué puede hacer?




1. Escribe un mínimo de cuatro longitudes que Laura pueda medir usando sólo la regla de 3 pulgadas.

___

2. Escribe un mínimo de cuatro longitudes que Laura pueda medir usando sólo la regla de 8 pulgadas.

___

3. Escribe cómo Laura puede usar las dos reglas para medir las longitudes siguientes:

   a. 5 pulgadas.
   b. 2 pulgadas
   c. 1 pulgada

4. Explica cómo Laura puede usar las dos reglas para medir 28 pulgadas.

Para resolver este problema, los estudiantes necesitan primero descubrir que con las reglas de 8 y 3 pulgadas, ellos pueden medir una longitud de una pulgada. Esto se debe a la siguiente razón matemática: Considera la ecuación $8x - 3y = n$ donde $x$ es el número de veces en que se usa la regla de 8 pulgadas; $y$ es el número de veces en que se usa la regla de 3 pulgadas, y $n$ es la longitud medida.

Para el valor de $x = 2$ y $y = 5$, se obtiene

$$8\,(2) - 3\,(5) = 16 - 15 = 1$$

Esto quiere decir que se usó 2 veces la regla de 8 pulgadas para obtener 16 pulgadas. Luego se sustrajo 5 veces la longitud de la regla de 3 pulgadas (15 pulgadas) y así se obtuvo 1 pulgada.

Con este procedimiento se pueden obtener 2, 3, 4, 5, ..., $n$ número de pulgadas; es decir, cualquier número entero de pulgadas.

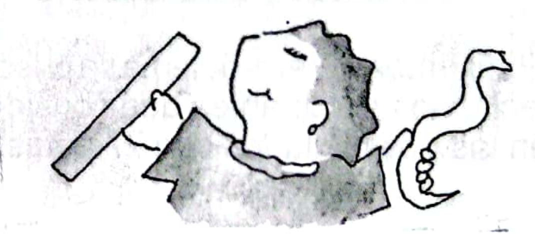
Los estudiantes pueden usar franjas, listones o cordones de 8 y 3 pulgadas y usarlos como ***modelos físicos*** para mostrar sus respuestas en las actividades 1 y 2.



En la actividad 3, algunos problemas podrían presentar dificultades. En estos casos sugiérales que pueden usar sus reglas para sustraer o bien sumar longitudes.

Se puede sugerir a los alumnos que trabajen en equipos de 4, para *hacer una tabla* que muestre los posibles caminos o formas de medir de 1 a 28 pulgadas. Tome en cuenta que las respuestas pueden variar.

| Pulgadas | Forma |
|---|---|
| 1 | $(2 \times 8) - (5 \times 3)$ |
| 2 | $(1 \times 8) - (2 \times 3)$ |
| 3 | $(0 \times 8) + (1 \times 3)$ |
| 4 | $(2 \times 8) - (4 \times 3)$ |
| 5 | $(1 \times 8) - (1 \times 3)$ |
| 6 | $(0 \times 8) + (2 \times 3)$ |
| 7 | $(2 \times 8) - (3 \times 3)$ |
| 8 | $(1 \times 8) + (0 \times 3)$ |
| 9 | $(0 \times 8) + (3 \times 3)$ |
| 10 | $(2 \times 8) - (2 \times 3)$ |
| 11 | $(1 \times 8) + (1 \times 3)$ |
| 12 | $(0 \times 8) + (4 \times 3)$ |
| 13 | $(2 \times 8) - (1 \times 3)$ |
| 14 | $(1 \times 8) + (2 \times 3)$ |
| 15 | $(0 \times 8) + (5 \times 3)$ |
| 16 | $(2 \times 8) + (0 \times 3)$ |



Para extender el problema, se puede decir a los estudiantes que Laura quiere medir 31 pulgadas de un material, y que cada pulgada cuesta N$ 9.75. ¿Cuál será el costo total por las 31 pulgadas de ese material?

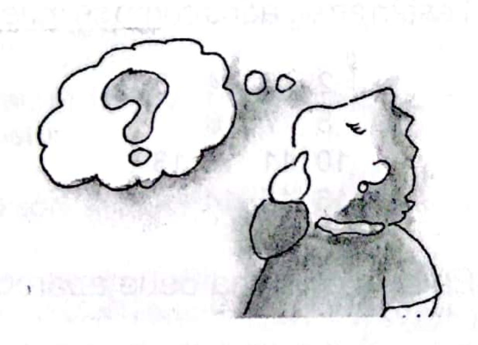
| regla de 8 pulgadas | regla de 3 pulgadas | costo |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

## 2.4 Problemas para aplicar las heurísticas estudiadas

**Problema 1.** Veinte parejas se sientan a comer en un restaurante. Las parejas se sientan en una serie de pequeñas mesas cuadradas en las que cabe una persona de cada lado. Las mesas se colocan una enseguida de la otra, para formar una larga mesa rectangular. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten las 20 parejas?

Ejemplo de discusión:

1. Leer. ¿El alumno puede describir la ilustración? ¿Visualiza la acción? ¿Qué se pregunta? ¿Qué información se da? ¿Hay palabras clave? ¿Cuáles?



2. Explorar. ¿Te serviría hacer un dibujo?



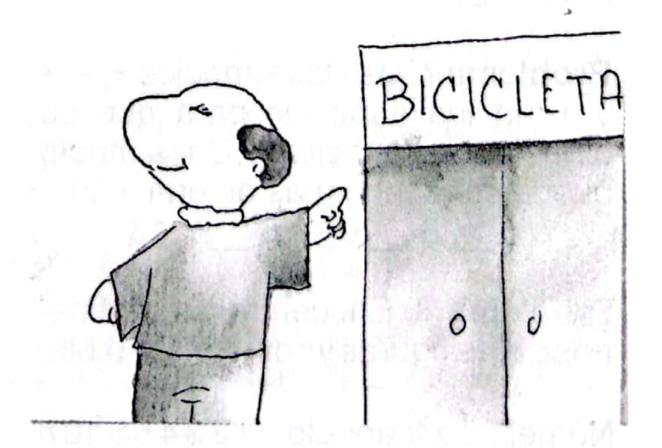
3. Seleccionar una estrategia. Reducir. Mirar un modelo.
4. Resolver. Con la tabla.



5. Mirar hacia atrás y extender. Verifica tu respuesta. Describe con tus palabras la solución. Observa variaciones. Pregunta: Si aumentara el número de..., ¿qué pasaría?

**Problema 2.** La tienda del Sr. García tiene 25 bicicletas y triciclos para rentar. Él tiene 7 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántos de cada tipo tiene el Sr. García?

El lector deberá discutirlo con los niños.



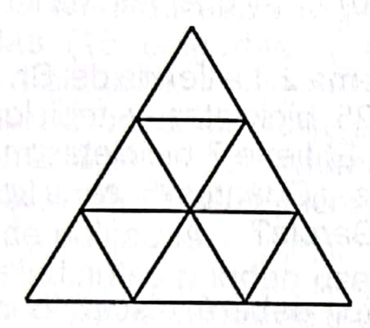
**Problema 3.** Una botella y su tapón cuestan $1.10. Si la botella cuesta un peso más que el tapón, ¿cuánto cuesta cada cosa?

Discútalo.

**Problema 4.** Si dibujas las diagonales de un cuadrado, ¿cuántos triángulos visualizas?

**Problema 5.** ¿Cuántos números hay en esta colección?
1, 4, 7, 10, 23, ..., 682.

**Problema 6.** ¿Cuántos triángulos equivalentes visualizas en un triángulo equilátero de 3 × 3 × 3 (como el que se muestra en la figura)?



¿Cuántos triángulos hay en uno de 4 × 4 × 4?

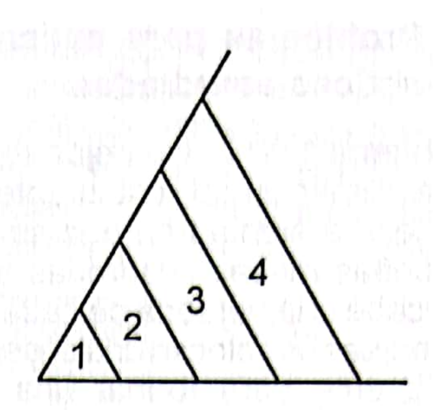
¿Cuántos debería haber en uno de 8 × 8 × 8?

**Problema 7.** Usa los símbolos +, –, × y ÷ en los espacios para que se cumpla la ecuación. (Un símbolo puede ser usado más de una vez).

6 __ 6 __ 6 __ 6 __ = 13

**Problema 8.** Encuentra los perímetros de las figuras y completa la tabla.

Número de triángulo 1 2 3 4 5 6 10 *n*
perímetro 40




| Núm. de triángulo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ...*n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro | 3 | | | | | | | | |

**Problema 9.** Los enteros mayores que 1 están arreglados como se muestra.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9 | 8 | 7 | 6 | |
| | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 17 | 16 | 15 | 14 | |

a. ¿En cuál columna debe aparecer el 100?
b. ¿En cuál columna debe aparecer el 1 000?
c. ¿En dónde el 1 999?
d. ¿En dónde el 99 997?

**Problema 10.** En un edificio trabajan 12 pintores y 7 electricistas. ¿Cuántos obreros trabajan en este edificio?

**Problema 11.** Encuentra los dígitos A, B, C y D y resuelve el siguiente criptograma.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

# Bibliografía


Ávila, A. (1991), "La reforma a las matemáticas en primaria. Lo posible y lo necesario", en *Educación matemática*, vol. 3, núm. 3, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 31-39.

Castelnuovo, E. (1989), "Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio", en *Educación matemática*, vol. 1, núm. 3, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 24-29.

Descartes, R. (1990), *Reglas para la dirección del espíritu*, Porrúa, México.

Desforgues, Ch. y A. Cockburna, (1987), *Comprendiendo al maestro de matemáticas*, The Falmer Press, Gran Bretaña.

Filloy, E. (1992), *Documento interno no publicado sobre desarrollo curricular*, CINVESTAV, México.

Frank, K.L. (1989), "Research on Mathematical Problem Solving", en *Research in Mathematics Education*, pp. 286-323.

Freudenthal, H. (1981), "Problemas mayores de la educación matemática", en Alejandro López Yañes (compilador), *Problemas de enseñanza de las matemáticas*, UNAM/ Porrúa, México, 1988.

Gagné, R.M. (1970, 1977), *Las condiciones del aprendizaje*, Interamericano, México.

Hersh, R. (1986), *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.

Jackson, P.W. (1992), *La vida en el aula*, Ediciones Morata, Madrid.

Kilpatrick, J. (1985), "A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching matematical problem solving", en Silver, E.A. (Editor), *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N. J., pp. 1-15.

Krulik, S. y J.A. Rudnick (1988), *Problem solving*, Allyn and Bacon, Inc., Estados Unidos.

Labarrere, A. (1987), *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.

Maker J. (1986), Documento interno de la DGEE, Proyecto CAS, México.

Mosquerra, J. (1990), "Estudiando las creencias del docente de matemáticas", Trabajo presentado en el *II Congreso Interamericano de Educación Matemática*, Brasil, pp. 253-259.

Musse, G. (1988), *Mathematics for Elementary Teachers*, McMillan Publishing Company, Nueva York.

National Council of Teachers of Mathematics (1989),*Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*, Reston, Virginia.

National Council of Teachers of Mathematics (1991),*Professional Standars for Teaching Mathematics*, Reston, Virginia.

Orton, A. (1990), *Didáctica de las matemáticas*, Ediciones Morata, Madrid.

Page, D.A. (1983), "Some Problems and Some Proposed Solution or Here is on Horse to Ride in the Merry go Round´s Next Trip", artículo presentado en la reunión anual de la asociación de la *American Educational Research.*

Parra, B. (1990), "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas", en *Educación matemática*, vol. 2, núm. 3, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 22-31.

Polya, G. (1990), *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

Puig, E.L. y F.P. Cerdán (1988), *Problemas aritméticos escolares*, Editorial Síntesis, Madrid, España.

Romberg y Carpenter (1986), "Research on Teaching and Learning Mathematics", en Wittrock, M. (Editor), *Handbook of Research on Teaching,* MacMillan, Nueva York.

Santos, T. (1992), "Resolución de problemas; el trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas", en*Educación matemática*, vol. 4, núm. 2. Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, T. (1992), *El aprendizaje de las matemáticas vía la resolución de problemas, en la enseñanza de las matemáticas: Algunas líneas de investigación en el área del nivel medio superior,* Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Santos, T. (1993), *Learning Mathematics: A Perspective Based on Problem Solving*, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Santos, T. (1993), "La resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas", en*Cuadernos de investigación*, núm. 25, año VII, julio de 1993, CINVESTAV, pp. 3-9.

Schoenfeld, A. (1985), *Matematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., Nueva York.

Schoenfeld, A. (1987), *"A Brief and Biased History of Problem Solving"*, en The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Thompson, A.G. (1984), "La relación de las concepciones de los profesores sobre la matemática y la enseñanza de las matemáticas con la práctica instruccional", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, pp. 105-127.

Thompson, A.G. (1985), "Teacher´s Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving, en Silver, E.A. (Editor), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, LawrenceErlbaum Associates Publishers, Estados Unidos, pp. 281-294.

Wertheimer, M. (1945/1991), *El pensamiento productivo*, Paidós, España.

Zubieta, F. (1975), *La moderna enseñanza dinámica de las matemáticas*, Trillas, México.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

**Preescolar**

# CONSTRUYO MATEMÁTICAS

## Desarrollo de habilidades intelectuales para preescolares

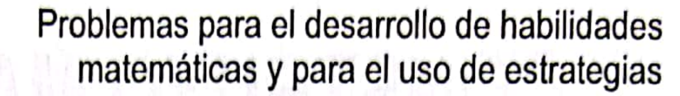
Ma. Teresa López Castro
Thelma Karina Salgado Peña




Cuaderno de trabajo dirigido a niños en edad preescolar. Al utilizarlo para el aprendizaje de la matemática, ésta se convierte en una actividad divertida, creativa, variada y comprensible, pero, sobre todo, cotidiana para los pequeños. Así se genera un ambiente de trabajo donde ellos se sienten libres de expresar sus ideas y dar sus respuestas, sean correctas o equivocadas; lo importante es que por sí mismos vayan construyendo su propio conocimiento a partir de experiencias concretas y del nivel de desarrollo en que se encuentran.

Como un auxiliar en la labor de las educadoras, los números de las páginas indican, por su color, el área específica que se está trabajando.

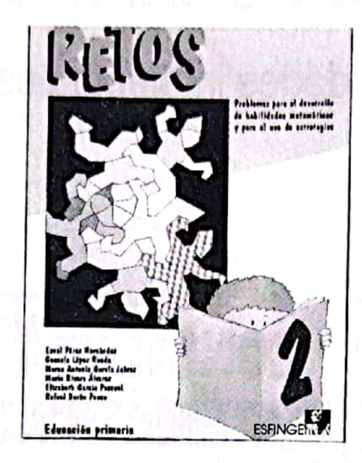
# Primaria




Problemas para el desarrollo de habilidades
matemáticas y para el uso de estrategias

Esnel Pérez Hernández
Gonzalo López Rueda
Marco A. García Juárez
Mario Rivera Álvarez
Elizabeth García Pascual
Rafael Durán Ponce

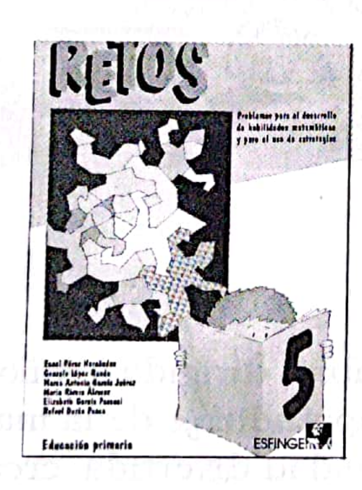












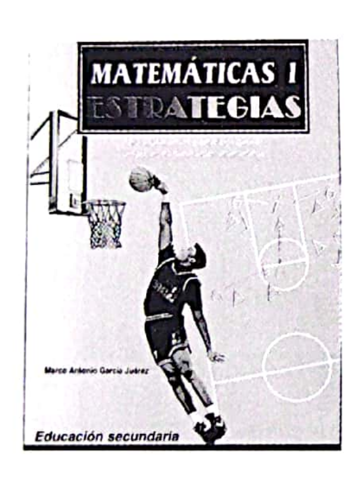
Esta serie propone problemas que, por su concepción y tratamiento, hacen que el alumno vaya construyendo su propio conocimiento.
Los autores, ganadores del certamen convocado por la SEP para la elaboración del libro de texto de matemáticas para el quinto año de primaria, han reunido, a lo largo de sus trayectorias como maestros e investigadores, esta colección de problemas que invitan a la reflexión y van fomentando el desarrollo de habilidades matemáticas a través de la utilización del sentido común.
Los docentes y los padres de familia encontrarán en esta serie una forma de que los alumnos de primaria descubran, amenamente, que las matemáticas son útiles y que pueden resultar divertidas.

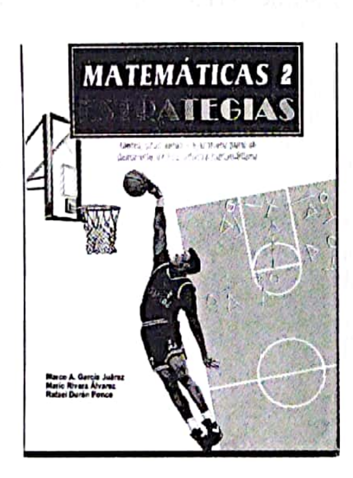
# Secundaria

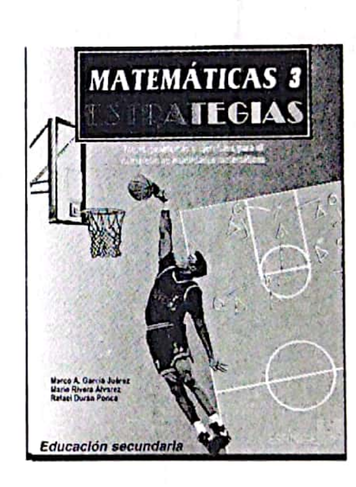
# ESTRATEGIAS
## Matemáticas

Teoría, problemas y ejercicios
para el desarrollo
de habilidades matemáticas

Marco A. García Juárez
Mario Rivera Álvarez
Rafael Durán Ponce




En esta serie, el profesor encontrará una estructura ágil en las lecciones, las cuales siguen un estricto orden pedagógico que toma en cuenta el nuevo enfoque propuesto por los nuevos programas de la materia y el tiempo real disponible en el salón de clases.

Los variados problemas contenidos en los textos muestran el potencial y la importancia que tiene la reflexión del estudiante en el empleo de tablas, diagramas y estrategias heurísticas, así como el uso inteligente de la calculadora y el análisis de diversos métodos de solución. Además, esta serie se acompaña de un *Avance programático* y un *Solucionario* para cada grado que representan una gran ayuda para el profesor, ya que son una guía para la planeación de sus clases y aun de los exámenes.

ESTA OBRA SE ACABÓ DE IMPRIMIR
EL DÍA 23 DE MAYO DE 1996, EN LOS TALLERES DE

*OFFSET UNIVERSAL, S. A.*
*Calle 2, 113 Granjas San Antonio*
*09070, México, D. F.*

LA EDICIÓN CONSTA DE 1,000 EJEMPLARES
MÁS SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

Han empezado a surgir nuevas perspectivas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta obra, *Introducción a la resolución de problemas. Teoría y estrategias*, trata sobre uno de esos enfoques: la noción fundamental de que los estudiantes deben ser enfrentados a problemas, de que se les debe dar la oportunidad de explorar técnicas matemáticas para resolver problemas.

El lector (maestros, psicólogos, pedagogos, padres de familia) encontrará aquí una serie de útiles reflexiones y sugerencias para trabajar con niños y jóvenes, que podrá incorporar no sólo a los contenidos matemáticos de diferentes grados, sino también al desarrollo de habilidades y destrezas fundamentales para una magnífica formación básica en matemáticas, que permitirá a los estudiantes realizar más eficazmente la resolución de problemas en su vida cotidiana.

**Editorial Esfinge, S.A. de C.V.**
Esfuerzo 18-A
Naucalpan, Edo. de México
México, C.P. 53510
Tel.: 359 11 11, con 5 líneas
Fax: 576 13 43

